

537
F79

Alle Rechte, insbesondere das der
Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Copyright 1921 by Julius Springer in Berlin.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Anforderungen an die Kenntnisse des Starkstromtechnikers in der Theorie der Wechselströme haben sich in den letzten Jahren erheblich gesteigert.

Nicht nur die Erkenntnis des Zusammenhangs der Vorgänge in Wechselstromkreisen, auch die graphischen und analytischen Methoden zu deren Untersuchung sind wesentlich erweitert und ausgebaut worden. Die neueren Methoden finden immer mehr Eingang in die Fachliteratur, und die Notwendigkeit, sie sich anzueignen, bietet sich allen, die die Literatur verfolgen wollen.

Ferner wird auch vom Starkstromtechniker heute eine mehr als nur gefühlsmäßige Kenntnis der nichtstationären Vorgänge im Hinblick auf Überströme und Überspannungen verlangt.

In das erweiterte Gebiet in gedrängter, aber dennoch streng wissenschaftlicher Form einzuführen, ist die Aufgabe, die das vorliegende Buch erfüllen will. Es wendet sich einerseits an den Ingenieur, andererseits will es auch Studierenden als Leitfaden dienen.

Bei dem beabsichtigten geringen Umfang waren gewisse Einschränkungen nötig.

Als bekannt sind die elektromagnetischen Grundgesetze vorausgesetzt. Dagegen werden die für das Verständnis der Wechselstromerscheinungen erforderlichen Begriffe eingehend erläutert, um auch dem Anfänger in dem Gebiet die Einarbeitung zu erleichtern.

Die jeweils gewonnenen Ergebnisse werden auf einfache technische Probleme angewendet, und wo angängig wird auf Messungen eingegangen.

Sondergebiete, wie z. B. die Theorie der Meßinstrumente, der Lichtbogenvorgänge u. a. mußten ausgeschieden werden.

Um die mathematischen Hilfsmittel auf ein möglichst geringes Maß herabzusetzen, wurden die Ausgleichsvorgänge in Leitungen neu bearbeitet. Durch Beschränkung auf die verzerrungsfreie Leitung ist es möglich, ausschließlich die d'Alembertsche Lösung der Schwingungsgleichung zur Behandlung aller Aufgaben zu verwenden.

Science

Theorie der Wechselströme

Von

Dr. Ing. Alfred Fraenckel

Zweite, erweiterte und
verbesserte Auflage

Mit 237 Textfiguren



Berlin
Verlag von Julius Springer
1921

PROPERTY OF

Bei der Durchsicht des Textes und der Korrekturen war Herr Dr.-Ing. W. O. Schumann mir in liebenswürdigster Weise behilflich; ich möchte ihm auch an dieser Stelle für seine wertvolle Unterstützung meinen besten Dank aussprechen.

Zürich, im Februar 1914.

A. Fraenckel.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Einteilung und die Behandlung des Stoffes sind bei der zweiten Auflage unverändert geblieben.

Ergänzungen erschienen in allen Kapiteln erforderlich, es seien erwähnt die Erweiterung der Superpositionsrechnungen, der Berechnung unsymmetrischer Mehrphasensysteme, eine elementare Erläuterung der Resonanzerscheinungen bei Drosselspulen mit Eisen, die symbolische Darstellung von Ausgleichströmen.

Obwohl andere als Kreisdiagramme in der graphischen Wechselstromtheorie nur selten vorkommen, schien es doch wünschenswert, auch auf das Vorkommen von Kurven höheren Grades hinzuweisen und kurz zu zeigen, wie aus den Gleichungen eines Systems auf die Ortskurve geschlossen werden kann.

Die Berechnung von Leitungsproblemen wurde an verschiedenen Stellen ergänzt. Kurz erläutert wurde die Spannungsregelung durch Blindstrom. An die Untersuchung über die Genauigkeit des Ersatzes einer Starkstromleitung durch ein einfaches Kettenleiterglied schließt sich eine kurze Theorie des Kettenleiters, die u. a. zur Einführung in die schon umfangreiche Literatur über das freilich noch nicht vollständig geklärte Verhalten von Spulen bei hohen Frequenzen herangezogen wird.

Durch Kürzungen an anderer Stelle und etwas engeren Druck ist der Umfang des Buches nahezu gleich geblieben.

Den Herren Prof. Dr.-Ing. F. Emde, Stuttgart, und Prof. Dr.-Ing. W. O. Schumann, Jena, bin ich für ihr freundliches Interesse und ihre wertvollen Ratschläge sehr zu Dank verpflichtet.

Baden (Schweiz), im Mai 1921.

Alfred Fraenckel.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.		
Einwellige Wechselströme		1
Allgemeines, Definitionen S. 1. — Erzeugung von einwelligen Strömen S. 2. — Addition von einwelligen Strömen S. 6. — Mittelwert und Effektivwert einwelliger Ströme S. 7. — Die Leistung eines einwelligen Wechselstromes S. 9.		
Zweites Kapitel.		
Selbstinduktion und Kapazität in Wechselstromkreisen . .		11
Selbstinduktion in Wechselstromkreisen S. 11. — Einwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion S. 16. — Kapazität in Wechselstromkreisen S. 19. — Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität S. 22.		
Drittes Kapitel.		
Graphische und analytische Methoden		26
Darstellung von Wechselströmen durch Vektoren S. 26. — Symbolische Darstellung von Wechselströmen S. 29. — Wechselstromdiagramme S. 34. — Inversion S. 38.		
Viertes Kapitel.		
Reihenschaltung von Stromkreisen		40
Grundgesetz für die Reihenschaltung mehrerer Stromkreise S. 40. — Der Spannungsabfall in einer Leitung S. 41. — Beispiel S. 44. — Leistungsmessung nach der Drei-Voltmeter-Methode S. 49.		
Fünftes Kapitel.		
Parallelschaltung von Stromkreisen		50
Grundgesetz für die Parallelschaltung von Stromkreisen S. 50. — Der resultierende Scheinwiderstand von zwei parallelgeschalteten Zweigen S. 51. — Stromresonanz S. 53. — Leistungsmessung nach der Drei-Amperemeter-Methode S. 56. — Korrektionsformeln für Leistungsmesser S. 56.		
Sechstes Kapitel.		
Zusammengesetzte Stromkreise		58
Zwei parallelgeschaltete Scheinwiderstände in Reihe mit einem dritten S. 58. — Die Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom S. 59. — Erzeugung von 90° Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung		

S. 62. — Die Schaltungen von Bouchérot S. 65. — Spannungsregelung einer Leitung durch Blindstrom S. 67. — Berechnung von Stromverteilungen durch Superposition S. 69.

Siebentes Kapitel.

Mehrwellige Ströme 73

Darstellung durch Fouriersche Reihen S. 73. — Ermittlung der Amplituden der Fourierschen Reihe S. 74. — Besondere Kurvenformen S. 75. — Arithmetische Analyse S. 80. — Graphische Verfahren S. 86. — Effektivwert und Leistung mehrwelliger Ströme S. 88. — Formfaktor und Scheitelfaktor mehrwelliger Ströme S. 89. — Stromverzerrung durch Selbstinduktion und Kapazität S. 91. — Graphische Darstellung von mehrwelligen Strömen.

Achtes Kapitel.

Mehrphasenströme 99

Die Mehrphasensysteme S. 99. — Symmetrische Mehrphasensysteme S. 100. — Verkettete Mehrphasensysteme S. 101. — Balancierte und unbalancierte Systeme S. 104. — Das Dreiphasensystem S. 105. — Berechnung einer Sternschaltung S. 106. — Dreieckschaltung. Die Beziehung der Phasenströme zu den Linienströmen S. 112. — Transfigurierung einer Dreieckschaltung in eine Sternschaltung S. 115. — Berechnung der Spannungserhöhung bei einem Mehrphasensystem S. 117. — Das Zweiphasen-Dreileitersystem S. 118. — Zerlegung eines unsymmetrischen Mehrphasensystems in zwei symmetrische S. 120. — Mehrwellige Ströme in Mehrphasensystemen S. 122. — Messung der Leistung von Mehrphasenströmen S. 125.

Neuntes Kapitel.

Stromkreise mit gegenseitiger Induktion 129

Gegenseitige Induktion zweier Stromkreise S. 129. — Streuung S. 133. — Der Lufttransformator S. 135. — Stromkreise mit induktiv verketteten Systemen S. 139. — Gegenseitige Induktion mehrphasiger Stromkreise S. 143. — Die Stromverteilung in massiven Leitern S. 147.

Zehntes Kapitel.

Wechselstromkreise mit Eisen, 153

Der Erregerstrom S. 153. — Verluste im Eisen S. 161. — Die Vektordiagramme des Transformators S. 165. — Das magnetische Feld einer Maschine mit verteiltem Eisen S. 168. — Erzeugung eines Drehfeldes S. 170. — Energieübertragung durch das Drehfeld S. 172. — Reihenschaltung eines Kondensators und einer Drosselspule mit Eisen S. 177.

Elftes Kapitel.

Leitungen mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität . . . 182

Die Leitungskonstanten S. 182. — Strom- und Spannungsgleichungen S. 183. — Verlustfreie Leitung S. 189. — Leitung mit Verlusten S. 194. — Ermittlung der Konstanten einer Leitung durch den Leerlauf- und den Kurzschlußversuch S. 201. — Die Leitungskonstanten bei Mehrfachleitungen S. 205. — Ersatzschaltungen für Starkstromleitungen S. 212. — Kettenleiter S. 214.

Zwölftes Kapitel.

Seite

Berechnung des Verhaltens von Stromkreisen auf Grund der Konstanten des Leerlauf- und des Kurzschlußversuches . . . 224

Die Konstanten S. 224. — Experimentelle Bestimmung der Konstanten S. 227. — Spannungsänderung S. 229. — Berechnung der maximalen abgegebenen Leistung S. 230. — Änderung der Belastung S. 231. — Wirkungsgrad S. 232. — Das Arbeitsdiagramm S. 235. — Beispiele S. 239. — Vektorgleichung und Ortskurve S. 247.

Dreizehntes Kapitel.

Ausgleichsvorgänge in quasistationären Stromkreisen . . . 252

Ausgleichströme S. 252. — Stromkreis mit konstantem Widerstand und konstanter Induktivität S. 253. — Stromkreise mit Widerstand und veränderlicher Induktivität S. 259. — Stromkreise mit Widerstand und Kapazität S. 263. — Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität S. 267. — Symbolische Darstellung von Ausgleichströmen S. 277. — Zusammengesetzte Stromkreise S. 288. — Stromkreise mit gegenseitiger Induktion S. 284. — Ausschaltvorgänge S. 286.

Vierzehntes Kapitel.

Ausgleichsvorgänge in nicht stationären Stromkreisen . . . 292

Die Gleichungen der freien Schwingungen auf Leitungen S. 292. — Freie Schwingungen bei offener oder bei kurzgeschlossener Leitung S. 296. — Reflexion der Wellen an Widerstand, Induktivität und Kapazität S. 306. — Reflexion an der Übergangsstelle von Leitungen mit verschiedener Charakteristik S. 320. — Widerstand, Induktivität und Kapazität an der Übergangsstelle von zwei Leitungen S. 331. — Verzerrte Wellen S. 340.

Namen- und Sachregister 348



Erstes Kapitel.

Einwellige Wechselströme.

1. Allgemeines, Definitionen. — 2. Erzeugung von einwelligen Strömen. —
3. Addition von einwelligen Strömen. — 4. Mittelwert und Effektivwert. —
5. Die Leistung eines einwelligen Stromes.

1. Allgemeines, Definitionen.

Als Wechselströme bezeichnet man allgemein Ströme, deren Stärke und Richtung sich mit der Zeit ändern.

Wechselströme im engeren Sinne sind die periodischen Wechselströme. Ihre Stärke und Richtung ändern sich periodisch mit der Zeit, und der Strom hat jeweils nach Verlauf einer bestimmten Zeit T wieder dieselbe Stärke und Richtung wie zu Anfang. Die Zeit T heißt die Periode.

Die einfachste periodische Funktion ist die Sinusfunktion. Ein Wechselstrom, dessen Augenblickswerte i sich nach einer Sinusschwingung ändern, heißt einwelliger Strom. Er wird dargestellt durch die Gleichung

$$i = i_m \sin \alpha \dots \dots \dots (1)$$

Die Sinusfunktion bewegt sich zwischen den Grenzwerten $+1$ und -1 . Daher ist i_m der größte Augenblickswert, den der Strom in einer Periode je einmal in positiver und negativer Richtung erreicht. i_m heißt der Höchstwert oder die Amplitude. Der veränderliche Winkel α in Gl. 1 ist, da eine zeitliche Änderung vorliegt, der laufenden Zeit t proportional

$$\alpha = \omega t + \varphi,$$

worin ω und φ Konstante sind. Der Periode T entspricht eine Änderung des Winkels α um 2π . Daher ist

$$2\pi = \omega T.$$

Der reziproke Wert der Periode T ist die Periodenzahl in der Sekunde oder die Frequenz f , folglich

$$2\pi f = \omega.$$

ω heißt die Kreisfrequenz, sie ist die Periodenzahl in 2π Sekunden. Mit diesen Konstanten wird

$$i = i_m \sin(\omega t + \varphi) = i_m \sin(2\pi f t + \varphi) \quad \dots (1a)$$

In Fig. 1 sind die Augenblickswerte des einwelligen Stromes als Funktion der Zeit aufgetragen.

Der konstante Winkel φ hängt von der willkürlichen Wahl des Anfangspunktes der Zeitzählung ab. Für $t=0$ ist nach Gl. 1a

$$i = i_m \sin \varphi,$$

und die positive Halbwelle des Stromes beginnt zur Zeit

$$t = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{\varphi}{2\pi} T,$$

φ heißt der Phasenwinkel.

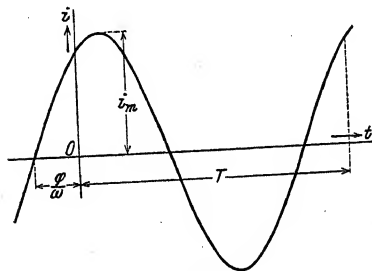


Fig. 1.

Diese Beziehungen gelten ebenso für Wechselspannungen.

Die Frequenz f der in der Starkstromtechnik verwendeten Wechselströme liegt für Licht- und Kraftanlagen zwischen 40 und 60 sek^{-1} , in Europa ist sie meist 50, für reine Kraftanlagen mitunter 25, für Bahnen oft 15 oder $16\frac{2}{3}$. Telephonströme haben Frequenzen bis etwa 5000, und in der drahtlosen

Telegraphie werden Frequenzen von mehreren Hunderttausend in der Sekunde verwendet.

2. Erzeugung von einwelligen Strömen.

Die technische Erzeugung von Wechselströmen beruht auf der elektromagnetischen Induktion.

Das Maxwell-Faradaysche Induktionsgesetz lautet: In jedem elektrischen Feld ist die Umlaufspannung u_0 für einen geschlossenen Weg gleich der Abnahme des umschlungenen magnetischen Induktionsflusses Ψ in der Zeiteinheit.

$$u_0 = -\frac{d\Psi}{dt} \quad \dots \quad (2)$$

Hierbei sind Umlaufsinn und Flußrichtung einander zugeordnet wie der Drehsinn und die Fortschreitung einer Rechtsschraube. (Korkzieherregel.) Die rechte Seite von Gl. 2 heißt nach Emdé der magnetische Schwund.

Für eine geschlossene Schleife aus linearen Leitern ist die Umlaufspannung

$$u_0 = \Sigma(iR - e_e) \quad \dots \quad (3)$$

Hierin sind i die Ströme, R die Widerstände, e_e eingeprägte elektromotorische Kräfte (EMKe) chemischen oder thermischen Ursprungs in den einzelnen in Reihe geschalteten Teilen der Leiterschleife.

In Wechselstromkreisen sind die eingeprägten EMKe meist Null. Dann gilt

$$\Sigma i R = - \frac{d\Psi}{dt} \dots \dots \dots (4)$$

Der magnetische Schwund hat in linearen Leiterkreisen formell dieselbe Rolle wie die eingeprägten EMKe. In diesem Sinne spricht man von einer induzierten EMK.

Der von dem Leiterkreis umschlungene Induktionsfluß bestimmt sich aus dem Integral der Normalkomponente der magnetischen Induktion über die vom Leiterkreis umrandete Fläche. Nun setzt sich ein geschlossener Leiterkreis zusammen aus den Leitern des Stromerzeugers, den Übertragungsleitungen und den Stromverbrauchern, jedem dieser Teile kommen Induktionsflüsse zu, ihre Summe ist der gesamte von dem Leiterkreis umschlungene Fluß.

Man kann die Teile für sich betrachten, indem man jeden für sich zu einem Kreis geschlossen denkt.

Im Stromerzeuger und anderen Apparaten bilden die Leiter Spulen aus in Reihe geschalteten Windungen. Der Spulenfluß Ψ ist die Summe der Windungsflüsse Φ_v . Hat die Spule w Windungen, deren Flüsse $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_w$ sind, so ist

$$\Psi = \sum_1^w \Phi_v.$$

Umschlingen alle w Windungen denselben Fluß Φ , so ist

$$\Psi = w \Phi.$$

Ψ wird auch als Kraftlinienwindungszahl bezeichnet.

Die Änderung des umschlungenen Flusses kann in verschiedener Weise erfolgen: durch zeitliche Änderung des Induktionsflusses oder durch eine Änderung seiner Lage gegenüber dem Stromkreis. Bei Verschiebung in einer Richtung x können wir setzen:

$$-\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \dots \dots \dots (5)$$

Das erste Glied rechts entspricht der Änderung der Lage bei unveränderlichem Fluß, man nennt es die EMK der Bewegung. Das zweite Glied entspricht der zeitlichen Änderung des gegen den Leiterkreis ruhenden Flusses und heißt die EMK der Ruhe.

In elektrischen Maschinen treten oft beide Arten zugleich auf.

Beispiel: s. Fig. 2 und 3. Eine ebene Windung wird in einem homogenen magnetischen Feld zwischen den Polen eines Magneten um ihre zur Richtung der Induktion senkrechte Achse mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit gedreht. Die Windung, deren Enden mit Schleifringen verbunden sind, sei durch einen äußeren Widerstand, etwa einen Spannungsmesser, zu einer Schleife geschlossen.

Der umschlungene Induktionsfluß ist hier von dem Winkel α abhängig, den die positive Normale auf der Windungsebene mit der Richtung der konstanten Induktion \mathfrak{B} bildet. Er ist für $\alpha = 0$ am größten und nimmt bei der Drehung in irgendeiner Richtung ab.

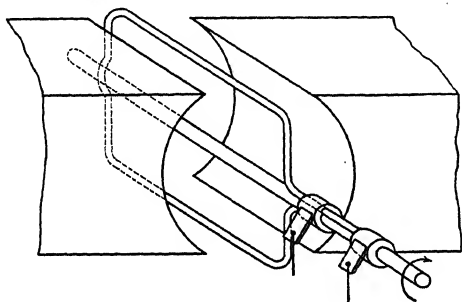


Fig. 2.

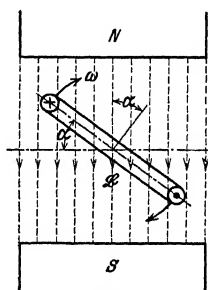


Fig. 3.

Der Umlaufsinn, der sich nach der Korkzieherregel ergibt, ist in Fig. 3 für die senkrecht zur Zeichnungsebene stehenden Leiter durch ein Kreuz (in die Zeichnungsebene hinein) und einen Punkt (aus der Zeichnungsebene heraus) angedeutet, er gibt die Richtung der induzierten EMK an. Sie ist in diesem Beispiel eine EMK der Bewegung, da wir die Induktion zeitlich als konstant annehmen.

Bei der Drehung ändert sich der umschlungene Fluß von seinem Höchstwert bei $\alpha = 0$ bis auf Null bei $\alpha = 90^\circ$, er durchsetzt von hier ab die Windung im entgegengesetzten Sinn, erreicht sein negatives Maximum bei 180° und nimmt bis $\alpha = 270^\circ$ auf Null ab, um bis $\alpha = 360^\circ$ wieder zu seinem positiven Höchstwert zu wachsen. Einer Umdrehung entspricht eine volle Periode des umschlungenen Flusses.

Die Änderungsgeschwindigkeit ist bei gleichförmiger Drehung am größten, wenn der umschlungene Fluß Null ist, also bei $\alpha = 90^\circ$ und 270° , sie hat jedoch in beiden Fällen entgegengesetzte Richtung, sie ist Null, wenn der Fluß am größten ist, also bei $\alpha = 0$ und 180° , hier liegen die Richtungswechsel der EMK.

Ist F die Fläche der Windung, so ist

$$\Psi = \mathfrak{B} F \cos \alpha = \Psi_m \cos \alpha.$$

Ψ_m ist der Höchstwert des umschlungenen Flusses.

$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ sei die Winkelgeschwindigkeit der Drehung. Da einer Umdrehung eine Periode entspricht, ist ω auch die Kreisfrequenz $2\pi f$. Es ist daher $\alpha = \omega t + \varphi$, wenn φ der Winkel ist, den die Normale auf der Windungsebene zur Zeit $t=0$ mit der Richtung der Induktion bildete. Dann wird

$$\Psi = \mathfrak{B} F \cos(\omega t + \varphi) = \Psi_m \cos(\omega t + \varphi) \quad . \quad . \quad (6)$$

$$-\frac{d\Psi}{dt} = \omega \Psi_m \sin(\omega t + \varphi) = 2\pi f \Psi_m \sin(\omega t + \varphi) \quad . \quad (7)$$

Die Erzeugung einer einwelligen Spannung erfordert hiernach die sinusförmige Änderung des umschlungenen Flusses. Der Höchstwert der induzierten EMK ist $2\pi f$ mal so groß wie der Höchstwert des umschlungenen Flusses.

Wir rechnen im folgenden stets mit dem „praktischen“ Maßsystem. Dann gibt Gl. 7 die Spannung in Volt an, wenn der umschlungene Fluß in Voltsekunden gemessen ist. (Diese Einheiten sind 10^8 mal so groß wie die entsprechenden elektromagnetischen CGS-Einheiten.) Zur Erzeugung von 1 Volt bei 50 Perioden in der Sekunde gehört ein umschlungener Fluß von $\frac{1}{314}$ Voltsekunde oder $\frac{1}{314} 10^8$ CGS Einheiten.

Die Höchstwerte des Flusses und der induzierten EMK treten zu verschiedenen Zeiten auf. Setzt man in Gl. 6 $\cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, so entspricht dem um $\frac{\pi}{2}$ größeren Phasenwinkel des Flusses eine um die Zeit $\frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$ früher beginnende positive Halbwelle als bei der EMK. Der Fluß eilt der EMK um eine Viertelperiode vor, umgekehrt die EMK dem Fluß um ebensoviel nach, s. Fig. 4.

Der Unterschied der Phasenwinkel zweier Sinuswellen heißt ihre Phasenverschiebung. Die voreilende Welle hat den größeren Phasenwinkel. Eine positive Phasenverschiebung bedeutet daher eine Voreilung und eine negative eine Nacheilung.

Im Gegensatz zum Phasenwinkel einer einzeln betrachteten Schwingung ist die Phasenverschiebung zweier durch einen physikalischen Vorgang verknüpfter Schwingungen unabhängig von der Wahl der Anfangszeit und hat eine physikalische Bedeutung,

bei dem Induktionsvorgang die, daß die EMK positiv ist, solange der Fluß abnimmt, und negativ, solange er zunimmt.

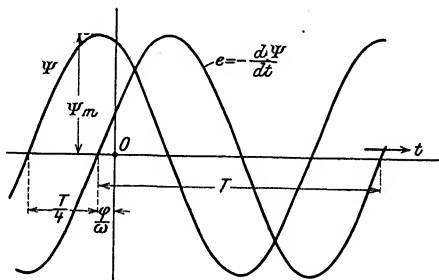


Fig. 4.

3. Addition von einwelligen Strömen.

Sind zwei Sinusschwingungen von gleicher Frequenz mit verschiedenen Amplituden und Phasenwinkeln gegeben

$$a_1 = a_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) \quad a_2 = a_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2),$$

so ist ihre Summe eine Sinusschwingung von derselben Frequenz

$$a = a_1 + a_2 = a_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Zur Bestimmung von a_m und φ bilde man die Summe für die zwei Zeitpunkte $\omega t = 0$ und $\omega t = \frac{\pi}{2}$. Es wird

$$a_m \sin \varphi = a_{1m} \sin \varphi_1 + a_{2m} \sin \varphi_2$$

$$a_m \cos \varphi = a_{1m} \cos \varphi_1 + a_{2m} \cos \varphi_2$$

und durch Quadrieren und Addieren folgt

$$a_m^2 = a_{1m}^2 + a_{2m}^2 + 2 a_{1m} a_{2m} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dots (8)$$

ferner durch Division

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{1m} \sin \varphi_1 + a_{2m} \sin \varphi_2}{a_{1m} \cos \varphi_1 + a_{2m} \cos \varphi_2} \dots (9)$$

Bei der Addition einer größeren Anzahl Schwingungen faßt man erst zwei zu einer Resultierenden zusammen, dann diese mit einer dritten usf.

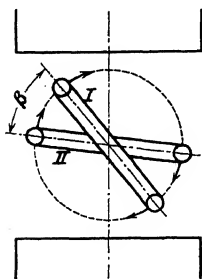


Fig. 5.

Die physikalische Anwendung dieses Satzes ergibt nun folgende beiden Fälle.

1. Vereinigen sich mehrere Leitungen, in denen einwellige Ströme gleicher Frequenz fließen, in einem Knotenpunkt, so ist der resultierende Strom wieder ein einwelliger Strom von derselben Frequenz.

2. Die Summe von mehreren in Reihe geschalteten einwelligen Spannungen gleicher Frequenz ergibt eine resultierende einwellige Spannung von derselben Frequenz.

Beispiel: Ordnet man in der elementaren Wechselstrommaschine (Fig. 2 S. 4) zwei Spulen an, die den Winkel β miteinander bilden (s. Fig. 5), so sind die induzierten EMEe

$$e_1 = e_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) \quad e_2 = e_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2),$$

worin die Phasenvoreilung $\varphi_1 - \varphi_2 = \beta$ ist, da die erste Spule der zweiten stets um den Winkel β voreilt.

Sind die Flächen der beiden Spulen gleich groß, so ist $e_{1m} = e_{2m}$, und die resultierende Amplitude wird bei Reihenschaltung nach Gl. 8

$$e_m^2 = 2 e_{1m}^2 (1 + \cos \beta)$$

$$e_m = 2 e_{1m} \cos \frac{\beta}{2}.$$

Nach Gl. 9 wird die Phase der resultierenden EMK

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi_1 + \sin (\varphi_1 - \beta)}{\cos \varphi_1 + \cos (\varphi_1 - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg} \left(\varphi_1 - \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\beta}{2}.$$

Die resultierende EMK ist $2 \cos \frac{1}{2} \beta$ mal so groß wie die jeder Spule, sie eilt gegen die eine um $\frac{1}{2} \beta$ nach, gegen die andere ebensoviel vor.

4. Mittelwert und Effektivwert einwelliger Ströme.

Der Mittelwert der Sinuskurve über eine beliebige Anzahl ganzer Perioden ist Null, weil der Inhalt der positiven und negativen Halbwellen gleich groß ist, aber entgegengesetztes Vorzeichen hat.

Daher vermag ein Wechselstrom von hoher Frequenz in einem Gleichstrommeßinstrument, bei dem eine vom Strom durchflossene Spule im Feld eines permanenten Magneten schwingt, keinen Ausschlag des Zeigers hervorzurufen. Er erzeugt nur schnellwechselnde Impulse nach beiden Seiten, denen aber das schwingende System infolge seiner Trägheit nicht folgen kann. Aus dem gleichen Grunde kann ein Wechselstrom im allge-

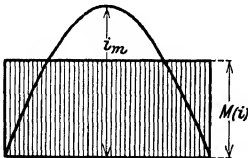


Fig. 6.

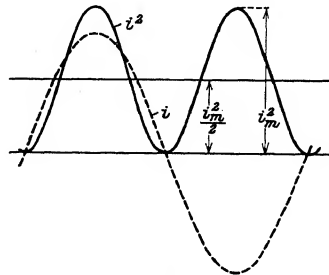


Fig. 7.

meinen nicht für elektrolytische Zwecke, z. B. zum Laden von Akkumulatoren, verwendet werden.

Bildet man den Mittelwert über eine Halbwelle, so erhält man verschiedene Werte, je nachdem man den Anfangspunkt wählt. Der größte Mittelwert, den man für eine Halbwelle erhält, ist gleich

der Höhe 'des mit der Halbwelle zwischen zwei Nulldurchgängen flächengleichen Rechtecks (s. Fig. 6), diesen nennt man kurz den Mittelwert $M(i)$. Es ist

$$M(i) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} i_m \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi} i_m = 0,637 i_m \dots (10)$$

Am wichtigsten ist der sogenannte quadratische Mittelwert, den man durch Bildung des Mittelwertes der Quadrate der Augenblickswerte erhält. Die quadratische Kurve einer Sinuskurve ist

$$i^2 = i_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} i_m^2 (1 - \cos 2 \omega t).$$

Sie ist eine Sinuskurve von der doppelten Frequenz, deren Ordinaten nie negativ werden sondern zur Mittelordinate $\frac{1}{2} i_m^2$ symmetrisch liegende Halbwellen bilden (s. Fig. 7). Die Wurzel aus dem Mittelwerte der quadratischen Kurve bezeichnet man mit J .

Es ist

$$J^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{2} i_m^2$$

$$J = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \dots \dots \dots (11)$$

J heißt der quadratische Mittelwert oder der Effektivwert. Für die Sinuskurve ist also

$$\text{Effektivwert} = \frac{\text{Amplitude}}{\sqrt{2}}.$$

Technische Angaben über die Größe von Strom und Spannung, für die z. B. ein Generator, ein Motor gebaut ist, beziehen sich stets auf den Effektivwert, weil man mit den gebräuchlichen Meßinstrumenten die Effektivwerte mißt.

Die Leistung der Stromwärme eines Wechselstromes berechnet sich mittels des Effektivwertes genau wie für einen Gleichstrom.

Ein Strom i erzeugt in einem Leiter vom Widerstand R in der Zeit dt nach dem Satz von Joule die Wärmemenge

$$i^2 R dt.$$

Die mittlere in der Zeiteinheit erzeugte Wärme ist daher

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = J^2 R.$$

Sie ist ebenso groß wie bei einem Gleichstrom, dessen Stärke gleich dem Effektivwert des Wechselstromes ist. Ein Hitzdraht-Strom- oder Spannungsmesser zeigt daher den Effektivwert an. Das gleiche gilt von einem elektrodynamischen Instrument, bei dem das Drehmoment zwischen einer festen und einer beweglichen Spule gemessen wird, die von dem zu messenden oder einem ihm proportionalen Strome durchflossen werden.

Ein Elektrometer zeigt in der sog. Doppelschaltung einen dem Effektivwert proportionalen Ausschlag.

Das Verhältnis des Effektivwertes zum Mittelwert eines Wechselstromes nennt man nach Fleming den Formfaktor. Für die Sinuskurve war nach Gl. 10 und 11

$$M(i) = \frac{2}{\pi} i_m \quad J = \frac{i_m}{\sqrt{2}},$$

daher ist der Formfaktor der Sinuskurve

$$\xi = \frac{J}{M(i)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11 \dots \dots \dots (12)$$

Das Verhältnis der Amplitude zum Effektivwert nennt man den Scheitelfaktor, er ist für die Sinuskurve $\sqrt{2}$.

In dem Beispiel in Abschnitt 2 kann hiernach zunächst der Mittelwert der induzierten EMK auf folgende Weise berechnet werden. Während einer halben Periode ändert sich der umschlungene Fluß im Maximum von $+\Psi_m$ auf $-\Psi_m$, somit um $2\Psi_m$. Dividiert man durch die halbe Periode, so erhält man den Mittelwert.

$$M(e) = \frac{4\Psi_m}{T} = 4f\Psi_m.$$

Hieraus erhält man die Amplitude und den Effektivwert

$$e_m = \frac{\pi}{2} M(e) = 2\pi f\Psi_m$$

$$E = \xi M(e) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} M(e) = \pi\sqrt{2}f\Psi_m.$$

5. Die Leistung eines einwilligen Wechselstromes.

Ein Stromkreis sei an eine Stromquelle angeschlossen, die eine einwillige Spannung erzeugt. Sie sei

$$p = p_m \sin \omega t.$$

Der Strom, der sich in dem Stromkreis einstellt, sei

$$i = i_m \sin(\omega t - \varphi),$$

er habe gegen die Spannung die Phasenverschiebung φ .

Die Arbeit, die dem Stromkreis in der Zeit dt zugeführt wird, ist

$$dA = p i dt = p_m i_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt$$

und die momentane Leistung

$$\frac{dA}{dt} = p i = p_m i_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} p_m i_m [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)].$$

Der Augenblickswert der Leistung schwingt, wie die Gleichung zeigt und durch Fig. 8 veranschaulicht wird, mit der doppelten Frequenz um den Mittelwert $\frac{1}{2} p_m i_m \cos \varphi$.

Die mittlere Leistung des Wechselstromes ist

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T p i dt = \frac{1}{2} p_m i_m \cos \varphi.$$

Da $\frac{i_m}{\sqrt{2}} = J$, $\frac{p_m}{\sqrt{2}} = P$ die Effektivwerte von Strom und Spannung sind, schreibt man

$$N = P J \cos \varphi \dots \dots \dots (13)$$

Die mittlere Leistung eines Wechselstromes berechnet sich als

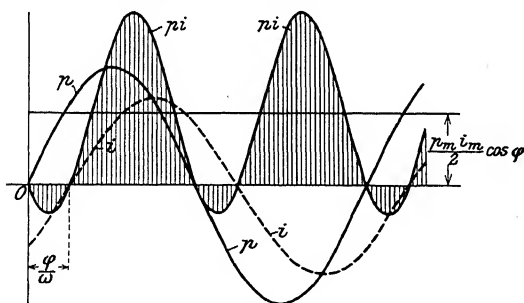


Fig. 8.

Produkt aus den Effektivwerten von Strom und Spannung und dem Kosinus der Phasenverschiebung zwischen ihnen. Sofern φ von Null verschieden ist, ist die Leistung kleiner als bei Gleichstrom, wenn Strom und Spannung ebenso groß sind wie die Effektivwerte des

Wechselstromes. Dies rührt daher, daß die Augenblickswerte der Leistung, wie Fig. 8 zeigt, während eines Teiles $\frac{\varphi}{\omega}$ jeder Halbperiode negativ sind. Der Wechselstrom führt während eines Teiles jeder Halbperiode dem Stromkreis von der Stromquelle Arbeit zu, während eines anderen Teiles gibt er Arbeit von dem Stromkreis an die Quelle zurück.

Bei einem Stromempfänger ist die zugeführte Arbeit größer als die zurückgegebene, der Mittelwert der Leistung ist positiv, dies ist stets der Fall, wenn φ kleiner als 90° ist. Ist $\varphi = 90^\circ$, so ist die mittlere Leistung Null, sie ist negativ, wenn φ größer als 90° ist. Dies entspricht einem Stromerzeuger.

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung wurde hier als gegebene Größe angenommen, und nicht gefragt, wodurch sie entsteht. Hierüber sollen die nächsten Kapitel Aufschluß geben.

Zweites Kapitel.

Selbstinduktion und Kapazität in Wechselstromkreisen.

6. Selbstinduktion in Wechselstromkreisen. — 7. Einwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion. — 8. Kapazität in Wechselstromkreisen. — 9. Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität.

6. Selbstinduktion in Wechselstromkreisen.

Das Durchflutungsgesetz. In der Umgebung elektrischer Ströme besteht ein magnetisches Feld. Als magnetische Umlaufspannung V_0 längs einer geschlossenen Bahn bezeichnet man die Arbeit, die von den magnetischen Feldkräften geleistet wird, wenn ein Einheitspol auf dieser Bahn herumgeführt wird.

$$V_0 = \int_0 \mathfrak{H}_s ds.$$

Diese Arbeit ist proportional der algebraischen Summe der elektrischen Ströme, die durch die Fläche treten, die von der geschlossenen Kurve begrenzt wird, sie „durchfluten“. Die Stromrichtung ist wieder in dem Sinne als positiv zu rechnen, der sich dem Umlaufsinn der Randkurve zuordnet, wie die Fortschreitung zur Drehung einer Rechtsschraube, s. Fig. 9. Man nennt die Summe der Ströme die „Durchflutung“

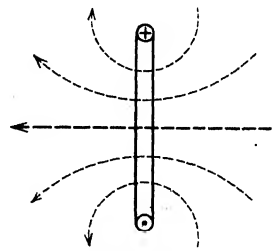


Fig. 9.

$$\Theta = \sum i$$

und das Durchflutungsgesetz lautet

$$V_0 = \Theta \quad \dots \dots \dots (14)$$

Die magnetische Randspannung ist gleich der Durchflutung.

Häufig gehören die Stromleiter einer Spule von w Windungen an, die alle denselben Strom i führen, dann ist

$$\int_0 \mathfrak{H}_s ds = iw \quad \dots \dots \dots (14a)$$

Die Induktion \mathfrak{B} und die mit ihr überall gleichgerichtete Feldstärke \mathfrak{H} sind durch die Beziehung verknüpft

$$\mathfrak{B} = \mu \mu_0 \mathfrak{H} \dots \dots \dots (15)$$

μ ist die relative Permeabilität des Mediums, eine Zahl, μ_0 die vom Maßsystem abhängige Permeabilität des Vakuums. Im praktischen Maßsystem wird \mathfrak{B} in Voltsekunden/cm², \mathfrak{H} in Amp/cm gemessen und es ist

$$\mu_0 = 4 \pi 10^{-9} \text{ Voltsek/Ampcm oder } 4 \pi 10^{-9} \text{ Henry/cm.}$$

Magnetische Energie. Der Energiegehalt eines magnetischen Feldes ist nach Maxwell für ein Raumelement dv

$$dW_m = dv \int_0^{\mathfrak{B}} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}.$$

In Medien, in denen die Permeabilität unabhängig von der Induktion ist, ist

$$d\mathfrak{B} = \mu \mu_0 d\mathfrak{H} \text{ und}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mu \mu_0 \mathfrak{H}^2 dv \dots \dots \dots (16)$$

ist über das ganze Feld zu erstrecken. Um die Energie durch den Induktionsfluß und den ihn erzeugenden Strom z. B. einer Stromschleife auszudrücken, zerlegt man das Feld in Induktionsröhren, die alle den Strom i umschlingen, von dem sie herrühren. Für ein Element dv einer solchen Röhre sei ds das Längenelement der Achse, df ihr Querschnitt. Längs jeder solchen Röhre ist $\mu \mu_0 \mathfrak{H} df = \mathfrak{B} df$ der konstante Fluß durch die Röhre und die Energie

$$\frac{1}{2} \mathfrak{B} df \int_0^{\mathfrak{B}} \mathfrak{H} ds = \frac{1}{2} \mathfrak{B} df i.$$

Die gesamte Energie des Feldes der einzeln betrachteten Stromschleife wird durch Integration über alle Induktionsröhren

$$W_m = \frac{i}{2} \int \mathfrak{B} df = \frac{i}{2} \Psi, \dots \dots \dots (17)$$

worin Ψ (s. S. 2) der von der Stromschleife umschlungene Induktionsfluß ist. Da er hier von dem Strom i allein herrührt, ist er ihm proportional, solange die Permeabilität unabhängig von \mathfrak{B} ist. Man setzt

$$\Psi = L i \dots \dots \dots (18)$$

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 \dots \dots \dots (19)$$

L ist der Selbstinduktionskoeffizient oder die Induktivität des Leiterkreises. Es ist numerisch gleich dem umschlungenen Fluß, den der Strom 1 Amp. erzeugt. Die Einheit ist

$$1 \text{ Voltsekunde/1 Amp.} = 1 \text{ Henry (H).}$$

Der tausendste Teil davon heißt 1 Millihenry (mH).

Beispiele. 1. Eine Ringspule von rechteckigem Querschnitt (Fig. 10). Die Windungen mögen so dicht aneinanderliegen, daß der ganze Induktionsfluß im Inneren des Ringes verläuft, und jede der w Windungen den ganzen Induktionsfluß umschließt. Aus Symmetriegründen sind dann die Kraftlinien konzentrische Kreise. Nach dem Durchflutungsgesetz ist für einen Radius x

$$\oint_x 2\pi x = iw$$

$$\oint_x = \frac{iw}{2\pi x} \text{ Amp/cm}$$

$$\Psi = \mu\mu_0 w \int_{r_i}^{r_a} \oint_x a dx = 2iw^2 10^{-9} a \mu \int_{r_i}^{r_a} \frac{dx}{x} = 2iw^2 a \mu \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) 10^{-9} \text{ Voltsec.}$$

$$L = 2w^2 a \mu \ln \frac{r_a}{r_i} 10^{-9} \text{ Henry,}$$

worin μ als Konstante betrachtet ist. L ist dem Quadrat der Windungszahl w proportional.

Ist z. B. $r_i = 12$, $r_a = 15$ cm, $a = 10$ cm, $w = 300$, $\mu = 1$ (unmagnetisches Medium), so wird $L = 2 \cdot 300^2 \cdot 10 \cdot \ln \frac{15}{12} \cdot 10^{-9} = 0,4 \cdot 10^{-3}$ H. Der Draht habe 2 mm Durchmesser. Ein Strom von 5 Amp. bedingt eine Kraftlinienwindungszahl $\Psi = 2 \cdot 10^{-3}$ Voltsekunden und der Energiegehalt ist $W_m = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-3}$ Joule.

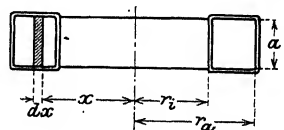
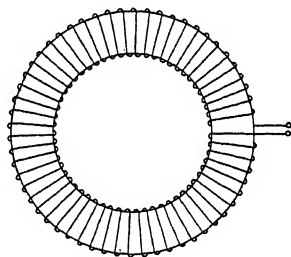


Fig. 10.

2. Eine Doppelleitung aus zwei parallelen Drähten vom Radius a im Abstand D (Fig. 11). Die Leitungen seien sehr lang und an den Enden leitend miteinander verbunden, sie bilden somit eine lange rechteckige Schleife. Der umschlungene Induktionsfluß setzt sich, wenn man von den Endverbindungen absieht, zusammen aus den Feldern, die jeder Leiter für sich erzeugt. Die Kraftlinien des Feldes eines Leiters sind infolge der Symmetrie konzentrische Kreise um die Leiterachse. Sie verlaufen teils innerhalb teils außerhalb des Leiters. Außerhalb des Leiters sind sie von allen Stromfäden des Leiters durchflutet, innerhalb nur von einem Teil. Für einen Punkt P im Abstände x von der Leiterachse ist für

$$x > a \quad \oint' 2\pi x = i \quad \oint' = \frac{i}{2\pi x},$$

$$x < a \quad \oint'' 2\pi x = i \frac{x^2}{a^2} \quad \oint'' = \frac{ix}{2\pi a^2},$$

wobei angenommen ist, daß der Strom sich gleichmäßig über den Querschnitt verteilt. Die beiden gestrichelten Kurven in Fig. 11 zeigen die Feldstärken jedes Leiters und die Zusammensetzung gibt die Verteilung des Feldes beider Leiter in Fig. 12. Da die Leiter

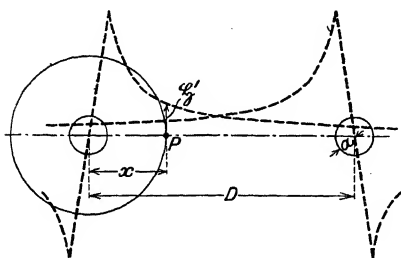


Fig. 11.

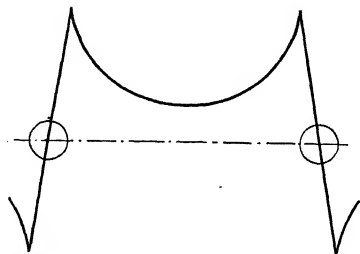


Fig. 12.

gleiche Flüsse durch die Schleife schicken, ist der Fluß von einer Leiteroberfläche bis zur anderen für die axiale Länge l und $\mu = 1$

$$\Psi' = \mu_0 2 \int_a^D \mathfrak{H}' l dx = \frac{2l}{10^9} \int_a^D \frac{2i}{x} dx = 4li \ln \left(\frac{D}{a} \right) 10^{-9} \text{ Voltsek.}$$

Im Inneren der Leiter sind die Kraftlinienwindungen für beide Leiter zusammen (für $\mu = 1$)

$$\Psi'' = 2\mu_0 \int_0^a \mathfrak{H}'' \frac{x^2}{a^2} l dx = \frac{2l}{10^9} \int_0^a 2i \frac{x^3}{a^4} = il 10^{-9}$$

$$\Psi = \Psi' + \Psi'' = il \left[4 \ln \frac{D}{a} + 1 \right] 10^{-9} \text{ Voltsek.}$$

$$L = l \left[4 \ln \frac{D}{a} + 1 \right] 10^{-9} \text{ Henry}$$

Zwei Drähte von 50 qmm^2 Querschnitt, $a = 0,4 \text{ cm}$, im Abstand $D = 100 \text{ cm}$ haben bei einer Länge von $1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$ eine Induktivität

$$L = 10^5 \left[4 \cdot \ln \frac{100}{0,4} + 1 \right] 10^{-9} = 2,31 \text{ mH.}$$

Das erste Glied in der Klammer ist 22,1, der Anteil des Feldes im Innern der Leiter an der Induktivität ist nur 4,5 %.

Bei ferromagnetischen Medien kann von einem Selbstinduktionskoeffizienten nicht gesprochen werden, weil wegen der veränderlichen Permeabilität keine Proportionalität zwischen Strom und Fluß besteht. Wie dort zu rechnen ist, wird in Kap. X gezeigt. Hier beschränken wir uns auf die Fälle, für die L konstant ist.

Elektromotorische Kraft der Selbstinduktion.

Ändert sich der Strom in einem Stromkreis, so ändert sich der von ihm erzeugte Induktionsfluß und die magnetische Energie des Feldes. Den magnetischen Schwund des Eigenfeldes

$$-\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

nennt man die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion. Das negative Zeichen sagt, daß sie der Zunahme des Stromes entgegengerichtet ist. Wächst der Strom in der Zeit dt um di , so nimmt die Energie des Feldes um $dW_m = d(\frac{1}{2} i^2 L) = iL di$ zu.

Dem Stromkreis wird hierbei von der Stromquelle eine momentane Leistung

$$\frac{dW_m}{dt} = iL \frac{di}{dt}$$

zugeführt. Nimmt der Strom ab, so wird die Energie des Feldes kleiner, der Stromkreis gibt in jedem Augenblick an die Stromquelle eine momentane Leistung zurück:

$$-\frac{dW_m}{dt} = -iL \frac{di}{dt}.$$

Ein Wechselstrom steigt im ersten Viertel jeder Periode von 0 bis i_m , er speichert hierbei in seinem magnetischen Felde eine Energie $\frac{1}{2} i_m^2 L$ auf und entnimmt während dieser Zeit elektrische Leistung der Stromquelle; in dem zweiten Viertel der Periode fällt er von i_m auf Null und gibt die zuvor aufgespeicherte magnetische Energie unter Abgabe von elektrischer Leistung an die Stromquelle zurück. Findet im magnetischen Felde kein Energieverlust statt, so ist die mittlere Leistung in der halben Periode Null. In der nächsten halben Periode wachsen der Strom und das magnetische Feld im entgegengesetzten Sinn, für den Betrag der Energie des Feldes ist dies gleichgültig; das Spiel der Energieaufnahme und Rückgabe ist in jeder halben Periode dasselbe.

Ein Energieverlust tritt hingegen durch Stromwärme in dem Leiter auf, er ist $i^2 R dt$.

Ist daher p die Spannung der Stromquelle, so ist in jedem Augenblick die Leistungsgleichung

$$pi = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (20)$$

Durch Division durch i wird die Spannungsgleichung

$$p = Ri + L \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (21)$$

Für $i = \text{konst.}$ fällt das zweite Glied rechts fort, die Gleichung drückt dann das Ohmsche Gesetz für Gleichstrom aus. Hier ad-

diert sich zur Spannung der Stromquelle die selbstinduzierte Spannung. Da sie der Zunahme des Stromes entgegengerichtet ist, muß die zugeführte Spannung in jedem Augenblick nicht nur den Ohmschen Spannungsabfall sondern auch die EMK der Selbstinduktion überwinden.

7. Einwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion.

Um den Strom zu berechnen, der sich unter Einwirkung einer einwelligen Klemmenspannung p einstellt, hat man Gl. 21 zu integrieren. Es werde hier zunächst das partikuläre Integral betrachtet, das den stationären Zustand beschreibt, der sich kurz nach dem Einschalten einstellt. (Das vollständige Integral wird in Kap. XIII behandelt.) Hierzu geht man am besten vom Strom aus. Es sei

$$i = i_m \sin \omega t, \quad Ri = Ri_m \sin \omega t,$$

$$L \frac{di}{dt} = \omega L i_m \cos \omega t = \omega L i_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

somit

$$\begin{aligned} p &= Ri_m \sin \omega t + \omega L i_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= p_m \sin (\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Die Klemmenspannung erscheint hier aus zwei Teilen zusammengesetzt: $Ri_m \sin \omega t$ ist in Phase mit dem Strom und überwindet den Ohmschen Spannungsabfall, $\omega L i_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ eilt dem Strom um eine Viertelperiode vor und ist entgegengesetzt gleich der EMK der Selbstinduktion. Nach Gl. 8 S. 6 wird die Amplitude der Spannung

$$p_m = i_m \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \dots \quad (22)$$

und nach Gl. 9 die Voreilung der Spannung gegen den Strom

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} \quad \dots \quad (23)$$

Die momentane Leistung ist

$$\begin{aligned} p i &= Ri_m^2 \sin^2 \omega t + \omega L i_m^2 \sin \omega t \cos \omega t \\ &= Ri_m^2 \frac{1 - \cos 2 \omega t}{2} + \frac{\omega L i_m^2}{2} \sin 2 \omega t. \end{aligned}$$

Der erste Teil schwingt mit doppelter Frequenz um den Mittelwert $\frac{1}{2} Ri_m^2$, der zweite um den Mittelwert Null. Die mittlere Leistung ist

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T p i dt = \frac{Ri_m^2}{2} = I^2 R, \quad \dots \quad (24)$$

worin J der Effektivwert des Stromes ist. Der Effektivwert der Spannung ist nach Gl. 22

$$P = J \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22a)$$

Die Größe ωL hat dieselbe Dimension wie ein Widerstand und heißt nach Heaviside Reaktanz (Blindwiderstand).

Das Verhältnis von Spannung zu Strom $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ heißt nach Steinmetz die Impedanz (Scheinwiderstand). Da R nicht immer gleich dem Ohmschen Widerstand ist, nennt man R den Wirkwiderstand. Zur Abkürzung setzt man

$$\omega L = X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25a)$$

In dem Beispiel Seite 13 war $L = 0,4 \cdot 10^{-3}$ Henry. Für einen Strom von 50 Perioden ist $\omega L = 2\pi 50 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} = 0,125$ Ohm. Der Ohmsche Widerstand für 300 Windungen von 80 met Länge und $3,14 \text{ mm}^2$ Querschnitt (2 mm Durchmesser) ist für Kupfer (sp. Wid. $0,0175 \cdot \text{Ohm} \cdot \text{mm}^2/\text{m}$) $R = 0,45$ Ohm. Für $J = 10$ Amp wird $P = 10 \sqrt{0,45^2 + 0,125^2} = 4,66$ Volt, $\text{tg } \varphi = 0,278$, $\varphi = 15^\circ 32'$.

Die Komponenten der Spannung in Phase und in Quadratur zum Strom heißen

$$P \cos \varphi = J R \text{ die Wirkspannung,}$$

$$P \sin \varphi = J X \text{ die Blindspannung oder Reaktanzspannung.}$$

Sind andererseits Spannung P , Wirk- und Blindwiderstand gegeben, so berechnet sich der Strom

$$J = \frac{P}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{P}{z}.$$

Seine Verzögerung gegen die Spannung ist wieder gegeben durch

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{X}{R}.$$

Der reziproke Wert des Scheinwiderstandes z ist ein Leitwert (Einheit 1 Siemens S), er heißt Scheinleitwert (Admittanz) und wird mit y bezeichnet. Man kann daher auch setzen

$$J = P y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Der Strom kann nun in zwei Komponenten zerlegt werden, die eine in Phase mit der Spannung, die andere um 90° dagegen phasenverschoben. Sie heißen

$$J \cos \varphi = P y \cos \varphi \text{ der Wirkstrom,}$$

$$J \sin \varphi = P y \sin \varphi \text{ der Blindstrom.}$$

Dieser Zerlegung entsprechen die Bezeichnungen

$y \cos \varphi = g$ der Wirkleitwert (Konduktanz)

$y \sin \varphi = b$ der Blindleitwert (Suszeptanz)

$$y = \sqrt{b^2 + g^2}.$$

Die Leitwerte stehen mit den Widerständen in folgenden Beziehungen:

$$\left. \begin{array}{lll} y = \frac{1}{z} & g = \frac{R}{z^2} & b = \frac{X}{z^2} \\ z = \frac{1}{y} & R = \frac{g}{y^2} & X = \frac{b}{y^2} \end{array} \right\} \dots \dots (27)$$

$$\tan \varphi = \frac{X}{R} = \frac{b}{g} \quad \cos \varphi = \frac{R}{z} = \frac{g}{y} \quad \sin \varphi = \frac{X}{z} = \frac{b}{y} \quad (28)$$

Bei Reihenschaltung rechnet man besser mit den Widerständen, bei Parallelschaltung mit den Leitwerten.

Aus zwei Widerständen oder Leitwerten können stets die übrigen vier Konstanten berechnet werden. Zur experimentellen Bestimmung ist die Messung des Stromes J , der Spannung P und der Leistung N erforderlich.

Die Leistung ist

$$N = P J \cos \varphi = J^2 R = P^2 g,$$

$$\text{daher} \quad R = \frac{N}{J^2} \quad g = \frac{N}{P^2},$$

$$z = \frac{P}{J} \quad y = \frac{J}{P},$$

$$x = \sqrt{z^2 - R^2} \quad b = \sqrt{y^2 - g^2}.$$

Das Produkt PJ ist maßgebend für die magnetische und elektrische Beanspruchung einer Maschine oder eines Apparates, denn der Induktionsfluß bestimmt sich aus der Spannung, auch die Isolation der Leiter ist für die volle Spannung zu bemessen, wenn auch nur die Wirkspannung in die Leistung eingeht, ebenso ist der volle Strom für die Bemessung des Leiterquerschnitts maßgebend.

Man nennt

PJ die Scheinleistung,

$PJ \cos \varphi$ die Wirkleistung,

$PJ \sin \varphi$ die Blindleistung.

In unserem Falle eines induktiven Stromkreises ist

$$PJ \sin \varphi = J^2 \omega L = \frac{1}{2} i_m^2 \omega L$$

d. i. die Amplitude des infolge der Selbstinduktion schwingenden Teiles der Leistung.

8. Kapazität in Wechselstromkreisen.

Elektrisches Feld. In dem isolierenden Medium zwischen geladenen Leitern besteht ein elektrisches Feld. Die Beziehung zwischen den Vektoren des elektrischen Feldes und den Ladungen ist durch den Gaußschen Satz gegeben:

Der Verschiebungsfluß durch eine geschlossene Fläche ist gleich der von der Fläche eingeschlossenen Ladung

$$\int \mathfrak{D}_n df = q \dots \dots \dots (29)$$

Die Verschiebung \mathfrak{D} und die mit ihr überall gleichgerichtete Feldstärke \mathfrak{E} sind durch die Beziehung verknüpft

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathfrak{E} \dots \dots \dots (30)$$

ε ist die (relative) Dielektrizitätskonstante des Mediums, ε_0 die vom Maßsystem abhängige Dielektrizitätskonstante des Vakuums. Im praktischen Maßsystem wird die Verschiebung in Coulomb/cm², die Feldstärke \mathfrak{E} in Volt/cm gemessen, und es ist

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}} \text{ Farad/cm}$$

$$\text{Da (s. S. 13)} \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-9} \text{ Henry/cm,}$$

ist

$$\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 10^{20}}} = \frac{1}{c},$$

$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cmsek}^{-1}$ ist die Lichtgeschwindigkeit.

Während die Verschiebung beim Übergang von einem Dielektrikum zum anderen stetig ist, ändert sich die Feldstärke nach Maßgabe der Dielektrizitätskonstanten in Gl. 30.

Energie des elektrischen Feldes. Der Energiegehalt des elektrischen Feldes ist nach Maxwell:

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int \varepsilon \mathfrak{E}^2 dv, \dots \dots \dots (31)$$

wobei das Volumenintegral über das ganze Feld zu erstrecken ist. Diesen Ausdruck können wir so umformen, daß die Ladungen der Leiter und die Spannungen zwischen ihnen darin erscheinen.

Zwei Leiter seien so angeordnet, daß das Feld zwischen ihnen durch die Anwesenheit anderer Leiter (z. B. die Erde) nicht merklich beeinflußt wird. Zwischen den Leitern bestehe eine Spannung p .

Das Feld im Dielektrikum werde in Verschiebungsröhren zerlegt, deren Begrenzungsfläche überall in die Richtung der Verschiebung fällt. Der Fluß jeder Röhre ist konstant, und da sie an den Oberflächen der beiden Leiter endigt, ist er gleich der Ladung dq , die ihre Randkurve an den Leiteroberflächen abgrenzt. Ist

Pol, die folgende mit dem anderen Pol verbunden ist. Für eine Spannung von 1000 Volt zwischen den Belegungen ist die Feldstärke 40000 Volt/cm, die Ladung $q = 10^{-3}$ Coulomb, die Verschiebung $\mathfrak{D} = 1,77 \cdot 10^{-8}$ Coulomb/cm², die Energie $\frac{1}{2}$ Joule, die Energiedichte $3,54 \cdot 10^{-4}$ Joule/cm³.

2. Ein Zylinderkondensator (konzentrisches Kabel), Fig. 14. Der Außenleiter (Mantel) sei geerdet. Da alle Verschiebungslinien, die vom inneren Leiter ausgehen, auf dem Mantel enden, ist die Ladung auf der inneren Fläche des Mantels entgegengesetzt gleich der Ladung (q) des Innenleiters. Die Verschiebungslinien stehen senkrecht auf den Leitern und sind daher radial. Durch eine Zylinderfläche vom Radius r und der Länge l tritt der Verschiebungsfluß

$$2\pi r l \mathfrak{D} = q \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} = \frac{q}{2\pi r l}$$

$$p = \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{E} dr = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{D} dr = 2 \cdot 9 \cdot 10^{11} \cdot \frac{q}{\varepsilon l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = 2 \cdot 9 \cdot 10^{11} \frac{q}{\varepsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

$$C = \frac{q}{p} = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{9 \cdot 10^5} \text{ Mikrofarad.}$$

Ladung und Entladung eines Kondensators. Ändert sich die Spannung zwischen den Belegungen eines Kondensators um dp , so nimmt seine Ladung nach Gl. 33 um

$$dq = C dp$$

zu oder ab, je nachdem die Spannung steigt oder fällt. Der Strom in der Zuleitung ist hierbei

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dp}{dt} \dots (35)$$

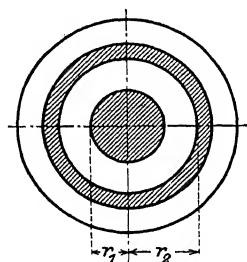


Fig. 14.

Für eine Gleichspannung ($p = \text{konst.}$) ist $i = 0$, in einem Gleichstromkreis ist der Kondensator eine Unterbrechung. Anders im Wechselstromkreis.

Während des Steigens der Spannung von Null bis p wird die Energie $\frac{1}{2} p^2 C$ in dem Kondensator aufgespeichert, dem Stromkreis wird dabei von der Stromquelle in jedem Augenblick eine Leistung

$$p C \frac{dp}{dt} = p i$$

zugeführt. Nimmt die Spannung von p bis auf Null wieder ab, so verschwindet das elektrische Feld, und die in ihm aufgespeicherte

Energie wird an die Stromquelle zurückgegeben. Der Kondensator gibt in jedem Augenblick die Leistung zurück

$$-pC \frac{dp}{dt} = -pi.$$

Ist die Spannung einwellig, so wächst sie in der ersten Viertelperiode von Null bis p_m , um in der zweiten Viertelperiode von p_m auf Null zu fallen. In der ersten Viertelperiode wird die Energie $\frac{1}{2}p_m^2C$ im Dielektrikum des Kondensators angesammelt und in der zweiten wieder zurückgegeben. In der ersten wird von der Stromquelle Leistung zugeführt, in der zweiten genau ebensoviel wiedergegeben. Die mittlere Leistung in der halben Periode ist Null.

Für $p = p_m \sin \omega t$ ist der Ladestrom des Kondensators

$$i = C \frac{dp}{dt} = C \omega p_m \cos \omega t = C \omega p_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

er ist ein einwelliger Strom von der Amplitude

$$i_m = p_m \omega C,$$

der gegen die Spannung um 90° in der Phase voreilt, denn nach Gl. 35 ist der Ladestrom so lange positiv, wie die Spannung steigt, und negativ (Entladestrom), wenn sie fällt. Daraus folgt ebenfalls, daß die mittlere dem Kondensator zugeführte Leistung Null ist.

9. Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität.

Ist in einem Stromkreis (s. Fig. 15) ein Kondensator C mit einer

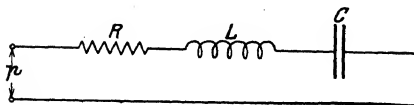


Fig. 15.

Drosselspule von der Induktivität L und dem Widerstand R in Reihe geschaltet, so lautet die Spannungsgleichung

$$p = Ri + L \frac{di}{dt} + \int \frac{idt}{C}. \quad (36)$$

Für einen einwelligen Strom $i = i_m \sin \omega t$, wird

$$Ri = Ri_m \sin \omega t$$

$$L \frac{di}{dt} = \omega L i_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\int \frac{idt}{C} = -\frac{i_m}{\omega C} \cos \omega t = -\frac{i_m}{\omega C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} p &= i_m R \sin \omega t + i_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right] \\ &= p_m \sin (\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (37)$$

Die Spannung erscheint hier aus zwei Teilen zusammengesetzt: $i_m R \sin \omega t$ ist in Phase mit dem Strom und überwindet den Ohmschen Widerstand, $i_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ eilt dem Strom um 90° vor und wird teils zur Überwindung der EMK der Selbstinduktion, teils als Ladespannung des Kondensators verbraucht, und zwar tritt die Differenz dieser Spannungen in Rechnung, da die erste dem Strom um 90° voreilt, die zweite ihm um 90° nacheilt. Der Effektivwert der Spannung ist daher

$$P = J \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \dots \dots \dots (38)$$

die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \dots \dots \dots (39)$$

Selbstinduktion und Kapazität wirken in dem Stromkreis einander insofern entgegen, als die erste den Strom gegen die Spannung verzögert, die zweite ihn in Voreilung bringt. Die Energien, die in dem magnetischen Felde der Selbstinduktion und in dem elektrischen Felde der Kapazität schwingen, werden zu verschiedenen Zeiten von der Stromquelle aufgenommen und an diese zurückgegeben. Die momentane Leistung ist, wenn die Spannungsgleichung mit $i_m \sin \omega t$ multipliziert wird,

$$p i = i_m^2 R \sin^2 \omega t + i_m^2 \omega L \sin \omega t \cos \omega t - \frac{i_m^2}{\omega C} \sin \omega t \cos \omega t.$$

Die beiden letzten Teile haben stets entgegengesetztes Vorzeichen, d. h. während vom Strom Energie im magnetischen Feld der Selbstinduktion aufgespeichert wird, wird solche aus dem elektrischen Feld des Kondensators abgegeben, und umgekehrt. Nur die Differenz der momentanen Leistungen wird zugeführt und außerdem der Stromwärmeverlust. Die beiden Felder laden sich zum Teil gegenseitig. Vollständig tritt dies ein, wenn

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \dots \dots \dots (40)$$

ist. Hierbei sind die momentanen Leistungen von Selbstinduktion und Kapazität entgegengesetzt gleich, vom Netz wird in jedem Augenblick nur der Stromwärmeverlust zugeführt und der Stromkreis verhält sich dem Netz gegenüber wie ein Ohmscher Widerstand. Aus Gl. 38 und 39 wird hierbei $P = JR$ und $\operatorname{tg} \varphi = 0$.

Diesen Fall bezeichnet man als Resonanz.

Für gegebene Werte von L und C tritt sie bei einer bestimmten Frequenz ein, nämlich

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \dots \quad (41)$$

Bei dieser, der Resonanzfrequenz, können die Blindspannungen an der Kapazität und der Induktivität sehr groß werden, es wird

$$J \omega_0 L = \frac{J}{\omega_0 C} = \frac{P}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \dots \quad (42)$$

Beispiel: Für $R=10$ Ohm, $L=1$ Henry tritt Resonanz bei $f_0=50$ Perioden ein, für $C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(100\pi)^2} = 1,015 \cdot 10^{-5}$ Farad.

Für $J=10$ Amp. ist $P=100$ Volt und $J \omega_0 L = \frac{J}{\omega_0 C} = 10 \sqrt{(100\pi)^2} = 3140$ Volt. Hierauf beruht die Gefahr der Resonanz.

Man unterscheidet hier

$\frac{1}{\omega C} = X_c$ den Blindwiderstand der Kapazität,

$\omega L = X_l$ den induktiven Blindwiderstand,

$X = X_l - X_c$ ist der resultierende Blindwiderstand.

Der hier behandelte Stromkreis wird als Thomsonsscher Schwingungskreis bezeichnet.

Um sein Verhalten bei veränderlicher Netzfrequenz ω zu übersehen, führen wir das Verhältnis $\omega : \omega_0 = \delta$ ein und setzen das Verhältnis des Wirkwiderstandes R zu der Größe $\sqrt{\frac{L}{C}}$, der die Dimen-

sion eines Widerstandes zukommt, $R \sqrt{\frac{C}{L}} = \varrho$. Dieses Widerstandsverhältnis gibt nach Gl. 42 für den Resonanzfall das Verhältnis der Netzspannung P zu den Blindspannungen an Induktivität und Kapazität an. Hiermit wird

$$\omega L = \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\delta}{\varrho} R \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega_0}{\omega} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\delta \varrho} R$$

$$J = \frac{P}{R \sqrt{1 + \frac{1}{\varrho^2} \left(\delta - \frac{1}{\delta} \right)^2}}.$$

Hierin ist $\frac{P}{R} = J_0$ der Höchststrom, der im Resonanzfall auftritt.

Das Verhältnis $J : J_0$ ist nur vom Widerstandsverhältnis ϱ und vom

Frequenzverhältnis δ abhängig. In Fig. 16 ist $J:J_0$ in Abhängigkeit von δ für zwei Werte von ϱ aufgetragen.

Kurve I mit dem flachen Strommaximum gilt für großen Widerstand, $\varrho = 1$, Kurve II mit dem spitzen Maximum für kleinen Widerstand, $\varrho = 0,1$. Je kleiner der Widerstand, um so schärfer ist die Resonanzlage ausgeprägt, um so enger der Bereich, in dem der Stromkreis einen beträchtlichen Strom hindurchläßt. Die Phasenverschiebung ist $\varphi = \text{artg} \frac{1}{\varrho} \left(\delta - \frac{1}{\delta} \right)$.

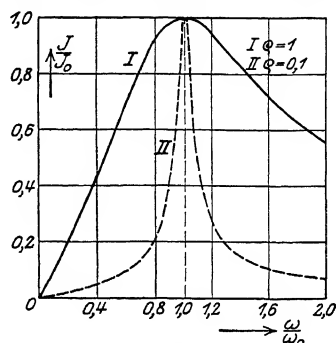


Fig. 16.

Für $\delta < 1$ ist φ ein Voreilungswinkel des Stromes, für $\delta = 1$ ist $\varphi = 0$ und für $\delta > 1$ ist φ ein Nacheilungswinkel des Stromes.

Drittes Kapitel.

Graphische und analytische Methoden.

10. Darstellung von Wechselströmen durch Vektoren. — 11. Symbolische Darstellung von Wechselströmen. — 12. Wechselstromdiagramme. — 13. Inversion.

10. Darstellung von Wechselströmen durch Vektoren.

Die Projektionen eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um einen festen Punkt rotierenden Radiusvektors auf eine feste Achse beschreiben bekanntlich die Ordinaten einer Sinuskurve.

Stellt daher die Länge OP des rotierenden Vektors Fig. 17 die Amplitude eines Wechselstromes i_m dar, und ist die Winkelgeschwindigkeit seiner Drehung gleich der Kreisfrequenz ω , so sind die Projektionen OA auf die zur Anfangslage OX senkrechte Richtung OY

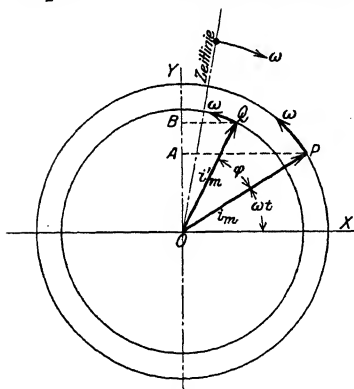


Fig. 17.

$$OA = i = i_m \sin \omega t$$

die Augenblickswerte des Stromes.

Für einen zweiten Vektor $OQ = i'_m$, der gegen OP um einen Winkel φ im Sinne der Voreilung verschoben ist, wird ebenso

$$OB = i' = i'_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Die beiden Vektoren OP und OQ können also als Symbole zweier

Wechselströme von gleicher Frequenz betrachtet werden, deren Amplituden i_m und i'_m sind, und die gegeneinander die Phasenverschiebung φ haben.

Anstatt nun die Vektoren rotieren zu lassen, kann man sie auch feststehend denken, und die Gerade, auf die sie projiziert werden, sich im umgekehrten Sinne drehen lassen; diese Gerade heißt die Zeitlinie. Der Vektor des voreilenden Stromes ist, wenn man die Drehrichtung der Vektoren zugrunde legt, im Sinne der Vor-

eilung verschoben. Geht man von der Drehung der Zeitlinie aus, so kommt diese, wie die Abbildung zeigt, bei der Drehung zuerst in die Lage des voreilenden Vektors.

Beliebig viele Ströme und Spannungen sind also durch die Länge ihrer Vektoren und durch die Winkel, die sie bilden, in ihrer Größe und Phase gegeneinander eindeutig bestimmt. Voraussetzung ist dabei, daß die Ströme und Spannungen gleiche Frequenz haben, nur solche lassen sich in einem Diagramm zusammenstellen. Über die Frequenz selbst sagt das Diagramm nichts aus.

Praktisch ist es zweckmäßig, die Länge der Vektoren in dem gewählten Maßstab gleich den Effektivwerten zu machen, weil diese gemessen werden; beim Übergang zu den Augenblickswerten sind dann die Projektionen mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren.

Da es bei der geometrischen Darstellung nur auf die Länge der Vektoren ankommt und auf die Winkel, die sie miteinander bilden, kann man jeden Vektor in dem Diagramm parallel mit sich selbst verschieben.

Hiervon macht man Gebrauch bei der graphischen Addition von Strömen. Die Summe zweier Ströme

$$i_1 + i_2 = i$$

ergibt sich (s. Fig. 18) durch Parallelverschiebung des Vektors OB des Stromes i_2 parallel mit sich selbst nach AC an den Endpunkt des Vektors OA des Stromes i_1 , oder, da die Reihenfolge bei der Addition gleichgültig ist, durch Verschiebung des Vektors OA des Stromes i_1 nach BC an den Endpunkt B des Vektors OB des Stromes i_2 .

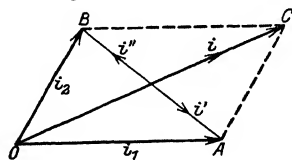


Fig. 18.

Der Vektor OC des Summenstromes i ist also die Diagonale des von den Vektoren der Teilströme gebildeten Parallelogramms.

Da die Differenz zweier Ströme

$$i_1 - i_2 = i'$$

gleich der Summe aus i_1 und dem negativ genommenen Wert von i_2 ist, ist das Parallelogramm von B aus erst bis C im Sinne von i_1 und dann bis A im negativen Sinne von i_2 zu durchlaufen, und es wird die Diagonale BA der Vektor des Differenzstromes i' .

Der Vektor des Differenzstromes

$$i_2 - i_1 = i''$$

ist analog die im Sinne AB durchlaufene Diagonale.

Differentialquotient und Zeitintegral eines Vektors. In den Spannungsgleichungen von Wechselströmen (s. Gl. 21 und 36)

kommt der Differentialquotient des Stromes nach der Zeit und das Zeitintegral eines Wechselstromes vor.

Da

$$\frac{di}{dt} = \frac{d(i_m \sin \omega t)}{dt} = \omega i_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

ist, erhält man den Vektor, der den Differentialquotienten eines Stromes darstellt, indem man die Länge des Stromvektors im Verhältnis $\omega:1$ vergrößert und ihn um 90° nach vorwärts dreht.

Da ferner

$$\int i dt = \int i_m \sin \omega t dt = \frac{i_m}{\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

ist, erhält man den Vektor des Zeitintegrals, indem man den Vektor des Stromes im Verhältnis $1:\omega$ verkleinert und ihn um 90° zurückdreht.

Beispiele. Für eine Spule vom Widerstand R und der Induktivität L war (s. Gl. 21)

$$p = iR + L \frac{di}{dt}.$$

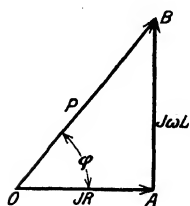


Fig. 19.

An den Vektor $OA = JR$ (Fig. 19), der in die Richtung des Stromes fällt, reht sich der um 90° dagegen voreilende Vektor $AB = J\omega L$, die Summe OB ist der Vektor der Klemmenspannung P , die dem Strom um den Winkel φ voreilt. Es folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{J\omega L}{JR} = \frac{\omega L}{R}.$$

Ist die Drosselspule mit einem Kondensator von der Kapazität C in Reihe geschaltet, so lautete die Spannungsgleichung (s. Gl. 36)

$$p = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Hier reht sich in Fig. 20 an den Vektor $OA = JR$ in Richtung des Stromes der um 90° dagegen voreilende Vektor $AB = J\omega L$ und an diesen der gegen den Strom um 90° nacheilende Vektor

$$BC = \frac{J}{\omega C}.$$

OC ist der Vektor der Klemmenspannung P und es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Verändert man die Größe der Kapazität, so bewegt sich der Endpunkt C des Vektors der Klemmenspannung auf der Geraden AB . Wenn er in A liegt, ist die Spannung mit dem Strom in Phase, hierbei ist

$$\frac{J}{\omega C} = J \omega L.$$

Dies ist der früher, s. S. 24, behandelte Fall der Resonanz. Wird $\frac{J}{\omega C} > J \omega L$, so liegt C unterhalb A , dann eilt der Strom der Klemmenspannung vor.

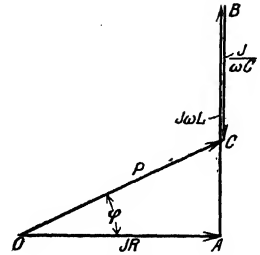


Fig. 20.

11. Symbolische Darstellung von Wechselströmen.

Die Darstellung von Wechselstromgrößen durch Vektoren kann auch analytisch durchgeführt werden.

Vektoren werden hierbei durch große deutsche Buchstaben bezeichnet. Ein Strom vom Effektivwert J wird z. B. durch einen Vektor \mathfrak{J} dargestellt. J ist der Betrag des Vektors \mathfrak{J} .

Drehung der Vektoren. Wird ein Vektor \mathfrak{J} um 180° gedreht, so gelangt er in die entgegengesetzte Richtung und wird hier mit $-\mathfrak{J}$ bezeichnet. Eine Drehung um 180° wird also in der symbolischen Darstellung durch die Multiplikation mit -1 bezeichnet. Die Drehung um 180° entsteht durch zweimalige Drehung um 90° ; es folgt also, daß die Drehung um 90° zu bezeichnen ist durch Multiplikation mit

$$\sqrt{-1} = j,$$

d. h. mit der komplexen Einheit. Die Wurzel kann je nach der Drehrichtung das positive oder negative Vorzeichen haben.

Es werde festgesetzt, daß eine Drehung um 90° im Sinne der Voreilung mit $+j$, im Sinne der Verzögerung mit $-j$ bezeichnet werde.

Ein Vektor $j\mathfrak{J}$ ist also ebenso groß wie der Vektor \mathfrak{J} , aber gegen diesen um 90° nach vorwärts gedreht.

Addition und Subtraktion von Vektoren. Die Addition von zwei Wechselströmen i_1 und i_2 , die durch ihre Symbole \mathfrak{J}_1 und \mathfrak{J}_2 bezeichnet sind, ergibt einen neuen Vektor

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2.$$

\mathfrak{J} ist die Diagonale des aus \mathfrak{J}_1 und \mathfrak{J}_2 gebildeten Parallelogramms (s. Fig. 18, S. 27).

Ebenso ergibt die Subtraktion der Vektoren \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 einen neuen Vektor

$$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2.$$

Multiplikation eines Vektors mit einer komplexen Zahl. Ein besonderer Fall der Addition ist der, daß zwei Vektoren zu addieren sind, deren Beträge proportional dem Betrag eines anderen (Ausgangs-) Vektors sind, und von denen der eine in Richtung des Ausgangsvektors, der andere in die dazu senkrechte Richtung fällt. Sei \mathfrak{Z} der Ausgangsvektor, so ist $a\mathfrak{Z} = OA$ (s. Fig. 21) ein neuer Vektor, der a mal so lang wie \mathfrak{Z} ist und in die gleiche Richtung fällt; ferner ist $j b \mathfrak{Z} = AB$ ein Vektor, der b mal so groß ist wie \mathfrak{Z} und um 90° dagegen nach vorwärts gedreht ist. Die vektorielle Summe aus beiden ergibt den neuen Vektor $\mathfrak{P} = OB$. Er ist

$$\mathfrak{P} = a\mathfrak{Z} + j b \mathfrak{Z} = (a + j b)\mathfrak{Z}.$$

Durch Multiplikation eines Vektors mit einer komplexen Zahl ergibt sich also ein neuer Vektor. Andererseits sieht man, wenn die Gleichung in der Form geschrieben wird:

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Z}} = a + j b,$$

daß das Verhältnis zweier Vektoren ausgedrückt wird durch eine komplexe Zahl.

Da die Längen der Vektoren die Effektivwerte darstellen, ist der Effektivwert des neuen Vektors

$$P = OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = J \sqrt{a^2 + b^2} \dots (43)$$

und die Phasenverschiebung zwischen P und J ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{OA} = \frac{b J}{a J} = \frac{b}{a} \dots (44)$$

Sind zwei Vektoren \mathfrak{P} und \mathfrak{Z} gegeben, so bildet man den Quotienten $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Z}}$ und zerlegt ihn in den reellen Teil a und den imaginären Teil b . Das Verhältnis der Effektivwerte ergibt sich dann aus Gl. 43 und die Phasenverschiebung durch Gl. 44.

Setzt man

$$OB^2 = r^2 = a^2 + b^2$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r},$$

so ist nach dem Satz von Moivre

$$a + jb = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r e^{j\varphi},$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Es ist daher

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{S}(a + jb) = \mathfrak{S} r e^{j\varphi}.$$

Der Vektor $\mathfrak{S} r e^{j\varphi}$ entsteht also aus dem Vektor \mathfrak{S} , indem man diesen im Verhältnis $r:1$ vergrößert und um φ nach vorwärts dreht.

Setzt man analog

$$\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{P}}{r e^{j\varphi}} = \frac{\mathfrak{P}}{r} e^{-j\varphi},$$

so ergibt sich: der Vektor $\frac{\mathfrak{P}}{r} e^{-j\varphi}$ entsteht aus dem Vektor \mathfrak{P} , indem man diesen im Verhältnis $1:r$ verkleinert und um φ nach rückwärts dreht.

Differentialquotient eines Vektors nach der Zeit und Zeitintegral. In der Zeit dt dreht sich der Vektor \mathfrak{S} um den Winkel ωdt und gelangt (s. Fig. 22) in die Lage \mathfrak{S}' . Es ist

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + PP'.$$

Hierin ist die Länge $PP' = j \omega dt$, und da sie senkrecht auf \mathfrak{S} steht, symbolisch bezeichnet durch $j \mathfrak{S} \omega dt$. Es wird also

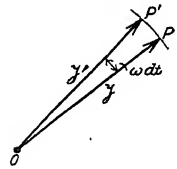


Fig. 22.

$$d\mathfrak{S} = j \omega \mathfrak{S} dt$$

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = j \omega \mathfrak{S} \quad \dots \quad (45)$$

Durch Umkehrung ergibt sich das Zeitintegral eines Vektors

$$\int \mathfrak{S} dt = \frac{\mathfrak{S}}{j \omega} = -\frac{j \mathfrak{S}}{\omega} \quad \dots \quad (46)$$

In der symbolischen Darstellung verschwinden also in den Gleichungen zwischen Strom und Spannung die Differentialquotienten nach der Zeit und die Zeitintegrale. Hierin liegt die Vereinfachung der Schreibweise bei dieser Darstellung.

Beispiele. Die Gleichung eines Stromkreises mit dem Widerstand R und der Induktivität L lautet:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{S} R + L \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \mathfrak{S}(R + j \omega L) = \mathfrak{S}(R + j X).$$

Für den Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{S} R + L \frac{d\mathfrak{S}}{dt} + \int \frac{\mathfrak{S} dt}{C} = \mathfrak{S} \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \\ &= \mathfrak{S} [R + j(X_L - X_C)]. \end{aligned}$$

Das Verhältnis von Spannung zu Strom, der Scheinwiderstand, ist in der symbolischen Darstellung eine komplexe Zahl. Der reelle Teil ist der Wirkwiderstand, der imaginäre der Blindwiderstand.

Der symbolische Ausdruck für den Scheinwiderstand z ist daher

$$z = (R + jX) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Aus der vektoriellen Gleichung erhält man das Verhältnis der Effektivwerte von Strom und Spannung und ihre Phasenverschiebung nach den auf S. 30 gegebenen Regeln.

Rechnung mit komplexen Zahlen. Bei der symbolischen Darstellung sind, wie gezeigt, die Gleichungen zwischen Strömen und Spannungen homogene und lineare Gleichungen, deren Koeffizienten komplexe Zahlen sind.

Es sei daher an die folgenden Regeln für die Rechnung mit komplexen Zahlen erinnert.

Addition und Subtraktion. Zwei komplexe Zahlen werden addiert oder subtrahiert, indem man die reellen Teile für sich und die imaginären Teile für sich addiert bzw. subtrahiert.

Ist

$$r_1 = a_1 + jb_1 \quad \text{und} \quad r_2 = a_2 + jb_2,$$

so wird

$$r = r_1 \pm r_2 = a + jb,$$

worin

$$a = a_1 \pm a_2 \quad \text{und} \quad b = b_1 \pm b_2 \quad \text{ist.}$$

Multiplikation. Es ist

$$r_1 = a_1 + jb_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = r_1 e^{j\varphi_1},$$

$$r_2 = a_2 + jb_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = r_2 e^{j\varphi_2},$$

durch Ausmultiplizieren wird

$$r = r_1 r_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

oder

$$\begin{aligned} r &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + j(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.

Hieraus folgt, daß das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen reell und gleich dem Quadrate des Betrages der Zahlen ist

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2.$$

Division. Analog werden zwei komplexe Zahlen dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Argumente subtrahiert.

In einem komplexen Bruch wird der Nenner reell gemacht,

indem man Zähler und Nenner mit der dem Nenner konjugiert komplexen Zahl multipliziert. Es wird

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1 + j b_1}{a_2 + j b_2} = \frac{(a_1 + j b_1)(a_2 - j b_2)}{(a_2 + j b_2)(a_2 - j b_2)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin (\varphi_1 - \varphi_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Potenzieren. Aus der Multiplikation folgt

$$\begin{aligned} p &= r^n = (a + j b)^n = r^n (\cos \varphi + j \sin \varphi)^n \\ &= r^n (\cos n \varphi + j \sin n \varphi) \\ &= r^n e^{j n \varphi}. \end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl wird zu einer Potenz erhoben, indem man den Betrag potenziert und das Argument mit dem Exponenten multipliziert.

Radizieren.

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{a + j b} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + j \sin \frac{\varphi}{n} \right) \\ &= \sqrt[n]{r} e^{j \frac{\varphi}{n}}. \end{aligned}$$

Man zieht die Wurzel aus einer komplexen Zahl, indem man den Betrag radiziert, und das Argument durch den Exponenten dividiert.

Berechnung der Leistung in der symbolischen Darstellung.

Bei der Berechnung der Leistung hat man es mit dem Produkt zweier symbolisch durch Vektoren dargestellter Wechselstromgrößen zu tun.

Multipliziert man zwei Vektoren wie komplexe Zahlen, z. B. eine Spannung $\mathfrak{P} = P e^{j \varphi_1}$ und einen Strom $\mathfrak{S} = J e^{j \varphi_2}$, so ist das Produkt, das dem äußeren Produkt der Vektorrechnung entspricht, und das durch eine eckige Klammer bezeichnet werde,

$$[\mathfrak{P} \mathfrak{S}] = P J \{ \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin (\varphi_1 + \varphi_2) \},$$

ein Ausdruck, dem keine physikalische Bedeutung zukommt. Er-

etzt man hingegen den einen Vektor durch seinen konjugiert komplexen, der mit \mathfrak{S}^t bzw. \mathfrak{P}^t bezeichnet werde, so erhält man

$$[\mathfrak{P} \mathfrak{S}^t] = PJ \{ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \} \quad . \quad (48a)$$

$$[\mathfrak{P}^t \mathfrak{S}] = PJ \{ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - j \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \} \quad . \quad (48b)$$

Der reelle Teil dieser Ausdrücke ist die Wirkleistung, der imaginäre die Blindleistung; sie erscheint je nach der Schreibweise mit verschiedenem Vorzeichen. Dies rührt daher, daß die Blindleistung keinen Mittelwert hat, ein Vorzeichen ihr daher nicht zukommt.

Es folgt die Regel: Man erhält aus zwei Vektoren die Wirkleistung als reellen Teil des Produktes des einen Vektors mit dem konjugiert komplexen des anderen. Der imaginäre Teil des Produktes stellt die Blindleistung dar. Symbolisch können wir dies wie folgt schreiben:

$$N = [\mathfrak{P} \mathfrak{S}^t]_r \quad N_j = [\mathfrak{P} \mathfrak{S}^t]_j,$$

wobei die Fußzeichen r und j bedeuten, daß der reelle bzw. der imaginäre Teil des Produktes zu nehmen ist.

Im Gegensatz zum Produkt zweier Vektoren als komplexer Zahlen soll als Vektorprodukt der Mittelwert aus dem Produkt zweier Sinusströme oder eines Sinusstromes und einer Sinusspannung bezeichnet werden. Dieser Mittelwert soll durch die runde Klammer bezeichnet werden:

$$(\mathfrak{P} \mathfrak{S}) = PJ \cos \varphi.$$

In der Vektorenrechnung heißt das so definierte Produkt das innere Produkt.

Für zwei gleiche Vektoren von gleicher Phase ist

$$(\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}) = J^2 \quad (j \mathfrak{S} \cdot j \mathfrak{S}) = J^2,$$

für zwei Vektoren mit 90° Phasenverschiebung ist

$$(\mathfrak{S} \cdot j \mathfrak{S}) = 0.$$

12. Wechselstromdiagramme.

Um die Arbeitsweise eines Stromkreises oder einer Maschine bei Veränderung der Konstanten des Stromkreises oder der Belastung zu übersehen, hätte man eine große Zahl von Gleichungen für die jeweiligen Konstanten zu berechnen.

Hier bietet die graphische Darstellung der Wechselstromgrößen durch Vektoren ein überaus anschauliches Mittel, um die Wirkung der veränderten Bedingungen schnell zu übersehen. Es besteht darin, daß man den geometrischen Ort sucht, den der Vektor eines Stromes oder einer Spannung bei Veränderung der Konstanten des Stromkreises beschreibt.

Ist der Strom konstant und die Spannung veränderlich, so ist

der geometrische Ort, den der Endpunkt des Spannungsvektors beschreibt, das Spannungsdiagramm.

Ist dagegen die Spannung konstant und der Strom veränderlich, so ist der geometrische Ort für den Endpunkt des Stromvektors das Stromdiagramm.

Im Spannungsdiagramm sind die Koordinaten des Spannungsvektors die Wirkspannung und die Blindspannung. Da die Spannungskomponenten sich wie die Widerstände (Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand) verhalten, stellt das Spannungsdiagramm, abgesehen von dem Maßstab, auch das Diagramm der Scheinwiderstände dar.

Analog stellt ein Stromdiagramm in verändertem Maßstab auch ein Diagramm der Scheinleitwerte dar.

Dies sei für einige ganz einfache Fälle zunächst erläutert.

Beispiele. 1. In einem Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion sei R konstant und L veränderlich. Dieser Fall liegt z. B. vor bei einer Drosselspule mit veränderlichem Luftraume oder bei einem Elektromagneten mit beweglichem Kern. Jeder Größe des Luftraumes oder jedem Hub des Elektromagneten entspricht ein anderer Wert L , während R konstant bleibt.

a) Ort des Spannungsvektors bei konstantem Strom. Entsprechend der Spannungsgleichung $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}R + j\mathfrak{I}\omega L$ liegt in Fig. 23 $OA = JR$ in Richtung des Stromes und $AB = J\omega L$ um 90° dagegen nach vorwärts gedreht, $OB = Jz = P$ ist der Vektor der Klemmenspannung. Jedem Wert von L entspricht eine Länge AB . Der Endpunkt B des Vektors der Klemmenspannung bewegt sich auf der Geraden AB . Sie ist das Spannungsdiagramm und in anderem Maßstab das Diagramm des Scheinwiderstandes. Winkel AOB ist der jeweilige Phasenverschiebungswinkel des Stromes.

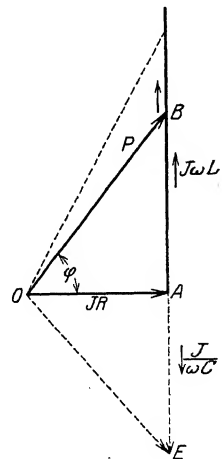


Fig. 23.

b) Ort des Stromvektors für konstante Spannung. Dividiert man die Spannungsgleichung durch R , so ergibt sich die Stromgleichung

$$\frac{\mathfrak{P}}{R} = \mathfrak{I} + j\mathfrak{I}\frac{\omega L}{R}.$$

Dieser Gleichung entsprechend ist in Fig. 24 $OD = J$ und um 90° dagegen nach vorwärts ge-

dreht $DC = J\frac{\omega L}{R}$ aufgetragen, sie ergeben die konstante Summe

$OC = \frac{P}{R}$, die in Richtung der Spannung liegt. Da das Dreieck ODC bei D stets rechtwinklig ist, bewegt sich der Endpunkt D

des Vektors des Stromes OD auf dem Halbkreis über OC als Durchmesser. Er ist das Stromdiagramm. Es verhält sich $DC:OD = \omega L:R = \operatorname{tg} \varphi:1$. Da dieser Maßstab für L unbequem ist, errichtet man in A' ein Lot auf OC , das von der Verlängerung von OD in B' geschnitten wird. Da Winkel $B'A'O' = \varphi$ ist, wird $A'B':OA' = \operatorname{tg} \varphi:1 = \omega L:R$. Die Längen $A'B'$ stellen also die veränderlichen Werte ωL in gleichem Maß dar wie OA' den konstanten Widerstand R .

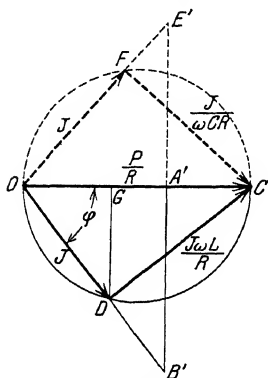


Fig. 24.

Die Seiten OC , OD , DC des Dreiecks ODC verhalten sich wie

$$\frac{1}{R}, \quad \frac{J}{P} = y, \quad \frac{J \omega L}{P R} = y \frac{\omega L}{R},$$

sie stellen also Leitwerte dar. OD ist in verändertem Maßstab der Scheinleitwert y , seine Projektion OG auf die Richtung der Spannung der Wirkleitwert $g = y \cos \varphi$, die dazu senkrechte Komponente GD der Blindleitwert $b = y \sin \varphi$.

2. Ist in einem Stromkreis mit Widerstand und Kapazität der Widerstand konstant, dagegen die Kapazität veränderlich, so unterscheidet sich dieser Fall von dem vorhergehenden dadurch, daß der Blindwiderstand $X_c = \frac{1}{\omega C}$ das negative Vorzeichen besitzt, der Strom eilt der Klemmenspannung vor. Das Spannungsdiagramm ist in diesem Fall der gestrichelt gezeichnete untere Teil der Geraden AB in Fig. 23, wobei $AE = \frac{J}{\omega C}$ ist. Das Stromdiagramm ist der in Fig. 24 ebenfalls gestrichelt gezeichnete obere Halbkreis über OC , wobei $OF = J$ und $FC = \frac{J}{\omega C R}$ ist.

3. Ist in einem Stromkreis der Blindwiderstand konstant, dagegen der Wirkwiderstand veränderlich, so erhält man das Spannungsdiagramm Fig. 25. Senkrecht zum Vektor des Stromes liegt der Vektor $OA = J\omega L$ der konstanten Blindspannung, und zwar für eine Selbstinduktion nach vorwärts gedreht. In Richtung des Stromvektors liegt der veränderliche Vektor $AB = JR$. Für jeden Wert von R ergibt sich ein neuer Punkt B und ein neuer Vektor OB der Klemmenspannung. Die Gerade AB ist also das gesuchte Spannungsdiagramm. Für eine Kapazität ist der Vektor

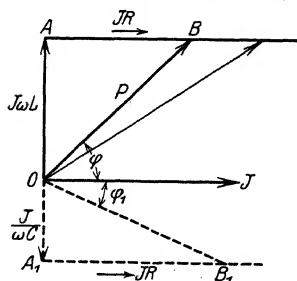


Fig. 25.

Leistung, wenn OD gleich dem Kreisdurchmesser, also wenn $X = 0$ ist. Sie ist

$$N_{max} = \frac{P^2}{R}.$$

Für den Stromkreis mit konstantem Blindwiderstand und veränderlichem Wirkwiderstand (Fig. 26) ist dagegen die Leistung am größten, wenn OG gleich dem Kreisradius, also wenn $\omega L = R$ ist. Sie wird

$$N_{max} = \frac{P^2}{2\omega L}.$$

Hierbei ist $\varphi = 45^\circ$.

13. Inversion.

Bei dem Stromdiagramm (Fig. 24) ist gezeigt, daß dieses in anderem Maßstab auch das Diagramm der Leitwerte darstellt. OD stellt y in demselben Maßstab dar, in dem OC' den Leitwert $\frac{1}{R}$ darstellt. Andererseits war gezeigt, daß dort $A'B'$ den Blindwiderstand X in demselben Maßstab darstellt, in dem OA' der Wirkwiderstand R ist, daher ist auch OB' der Scheinwiderstand z .

Bezeichnet man die Maßstäbe der Leitwerte bzw. der Widerstände mit u und v so daß 1 cm $= u$ Siemens, 1 cm $= v$ Ohm ist, so ist in Fig. 24

$$\begin{aligned} u OD &= y, & u OC' &= \frac{1}{R} \\ v OB' &= z, & v OA' &= R, \end{aligned}$$

und es wird

$$OC' \cdot OA' = OD \cdot OB' = \frac{1}{uv} = \text{konst.} = I.$$

Zwei Punkte, bei denen wie bei C' und A' oder bei D und B' in Fig. 24 das Produkt der Abstände von einem festen Punkt O konstant ist, nennt man invers. O ist das Inversionszentrum, das konstante Produkt heißt die Inversionspotenz.

Beschreibt einer der Punkte (B') eine Kurve, hier die Gerade $A'B'$, so bewegt sich sein inverser Punkt (D) auf der inversen Kurve (Kreis über OC). Wir finden also den Satz: Die inverse Kurve einer Geraden ist ein Kreis, der durch das Inversionszentrum geht, und umgekehrt ist die inverse Kurve eines Kreises, der durch das Inversionszentrum geht, eine Gerade.

Mit Hilfe dieses Satzes hätte man das Stromdiagramm aus dem Spannungsdiagramm wie folgt finden können.

Die Gerade $A'B'$ in Fig. 24 ist das Spiegelbild des Spannungs-

diagramms, das durch die Gerade AB der Fig. 23 dargestellt ist. In dem Spiegelbild ist nämlich der (positive) Blindwiderstand um 90° gegen den Wirkwiderstand nach rückwärts gedreht.

Man findet also das Stromdiagramm, indem man das Spiegelbild des Spannungsdiagramms in bezug auf den Anfangspunkt der Vektoren als Inversionszentrum invertiert.

Die Umkehrung des Vorzeichens des Blindwiderstandes zum Zweck der Inversion folgt daraus, daß, wenn bei dem Spannungsdiagramm der Phasenwinkel φ eine Voreilung der Spannung gegen den Strom bezeichnet und das positive Zeichen hat, er im Stromdiagramm eine Verzögerung des Stromes gegen die Spannung bedeutet und das negative Zeichen hat, und umgekehrt.

Hat man ein Spannungsdiagramm aus einem Stromdiagramm zu invertieren, so verwendet man ebenso nicht das Stromdiagramm selbst, sondern sein Spiegelbild, das man dadurch erhält, daß man den gegen den Wirkstrom voreilenden Blindstrom nach rückwärts und den nacheilenden Blindstrom nach vorwärts gedreht aufträgt. Bei Verwendung des Leitwertdiagramms ist also der positive Blindleitwert um 90° nach rückwärts, der negative um 90° nach vorwärts gegen den Wirkleitwert aufzutragen.

Hat man mehrmals zu invertieren, so geht man von dem Spiegelbild eines Diagramms aus, wenn die Zahl der vorzunehmenden Inversionen ungerade ist, und von dem Diagramm selbst, wenn sie gerade ist, weil jede einzelne Inversion ein Übergang von einem Spannungsdiagramm zu einem Stromdiagramm oder umgekehrt ist.

Satz: Die inverse Kurve eines Kreises, der nicht durch das Inversionszentrum geht, ist wieder ein Kreis, das Inversionszentrum ist ein Ähnlichkeitspunkt für beide Kreise. Aus Fig. 27 folgt nämlich

$$OB : OC_1 = OC : OB_1$$

$$OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = OA \cdot OA_1 = I.$$

Dies gilt auch, wenn das Inversionszentrum O innerhalb eines Kreises liegt, es liegt dann auch innerhalb des inversen Kreises. Der Umlaufsinn des inversen Kreises ist der umgekehrte wie bei dem Ausgangskreis.

Die Inversion ist zuerst von J. L. la Cour zur Darstellung von Wechselstromproblemen angewendet worden (Arnold, Wechselstromtechnik, Bd. I).

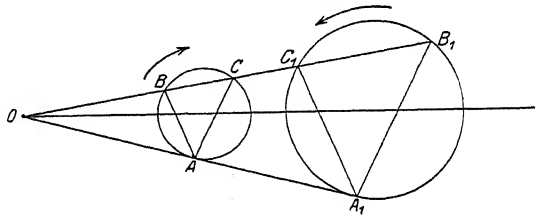


Fig. 27.

Viertes Kapitel.

Reihenschaltung von Stromkreisen.

14. Grundgesetz für die Reihenschaltung mehrerer Stromkreise. — 15. Der Spannungsabfall in einer Leitung. — 16. Beispiel. — 17. Leistungsmessung nach der Drei-Voltmeter-Methode.

14. Grundgesetz für die Reihenschaltung mehrerer Stromkreise.

Sind mehrere Stromkreise in Reihe geschaltet, deren Widerstände Induktivitäten und Kapazitäten der Reihe nach $R_1 R_2 R_3 \dots$,

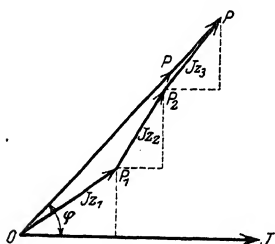


Fig. 28.

$L_1 L_2 L_3 \dots$, $C_1 C_2 C_3 \dots$, oder deren Blind- und Scheinwiderstände $X_1 X_2 X_3 \dots$ bzw. $z_1 z_2 z_3 \dots$ sind, so ist die resultierende Klemmenspannung P für einen bestimmten Strom J die geometrische Summe der Teilspannungen $P_1 P_2 P_3 \dots$ der einzelnen Stromkreise.

Diese Summation wird geometrisch durch den Linienzug $OP_1 P_2 P$ in Fig. 28 dargestellt.

Es ist

$$\mathfrak{P}_1 = \Im(R_1 + j X_1) = \Im \mathfrak{z}_1$$

$$\mathfrak{P}_2 = \Im(R_2 + j X_2) = \Im \mathfrak{z}_2$$

$$\mathfrak{P}_3 = \Im(R_3 + j X_3) = \Im \mathfrak{z}_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 + \dots = \Im[R_1 + R_2 + R_3 + \dots + j(X_1 + X_2 + X_3 + \dots)] \\ &= \Im(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 + \dots) = \Im \mathfrak{z}. \end{aligned}$$

Der resultierende Scheinwiderstand der Reihenschaltung ist

$$\mathfrak{z} = \Sigma(\mathfrak{z}_v) = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 + \dots = R + j X \quad \dots (49)$$

worin

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots = \Sigma(R_v) \quad \dots (50a)$$

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \Sigma(X_v) \quad \dots (50b)$$

Die resultierende Phasenverschiebung ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{\Sigma(X_r)}{\Sigma(R_r)} \quad \dots \quad (51)$$

Der Linienzug Fig. 28 stellt auch die Summation der Scheinwiderstände dar.

15. Der Spannungsabfall in einer Leitung.

Ein Stromkreis (Fig. 29) wird über eine Leitung gespeist. Es seien R_1 und X_1 Wirk- und Blindwiderstand der Hin- und Rückleitung, R_2 und X_2 die entsprechenden Größen des Belastungskreises, P_1 und P_2 die Spannungen am Anfang und am Ende der Leitung, J

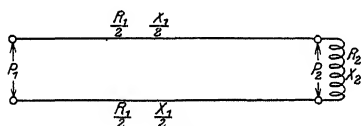


Fig. 29.

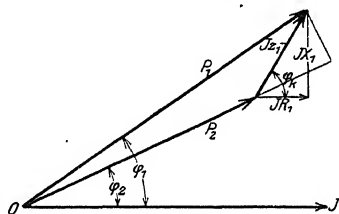


Fig. 30.

die Stromstärke. Es wird

$$J = \frac{P_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}$$

$$P_2 = J \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = P_1 \sqrt{\frac{R_2^2 + X_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_2}{R_2}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2}.$$

Fig. 30 stellt das Vektordiagramm der Spannungen dar. Die Sekundärspannung P_2 und der Spannungsabfall Jz_1 setzen sich zum Vektor der Primärspannung P_1 zusammen.

Der Spannungsverlust, d. h. die algebraische Differenz $P_1 - P_2$, ist kleiner als der Spannungsabfall Jz_1 , weil P_2 gegen J um einen kleineren Winkel voreilt als Jz_1 gegen J . Es wird erst $P_1 - P_2 = Jz_1$, wenn P_2 und Jz_1 in die gleiche Richtung fallen, d. h. wenn der Phasenwinkel der Belastung φ_2 und $\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{X_1}{R_1}$ gleich sind, d. h.

$$\frac{X_2}{R_2} = \frac{X_1}{R_1}.$$

Um den Einfluß der Phasenverschiebung auf den Spannungsabfall zu übersehen, werde der Fall betrachtet, daß die primäre Klemmenspannung P_1 und der Strom J der Größe nach konstant

sind, während φ_2 veränderlich ist. Hierbei ist also Jz_1 konstant. In Fig. 31 stellt OAB das Spannungsdreieck für $\varphi_2 = 0$ dar. Hierbei folgt aus der Figur

$$P_2 (\varphi_2 = 0) = \sqrt{P_1^2 - (JX_1)^2} - JR_1.$$

Ist nun J gegen P_2 um φ_2 verzögert, so ist der Vektor Jz_1 um den Punkt B nach rückwärts zu drehen um den Winkel $ABA' = \varphi_2$, OA' ist der zugehörige Wert von P_2 . Eilt J gegen P_2 um φ_2 vor, so ist Jz_1 um diesen Winkel von AB nach $A''B$ zu drehen, und es wird $OA'' = P_2$. Der Endpunkt des Vektors der sekundären Spannung P_2 wandert also bei Veränderung von φ_2 auf dem Kreis um B mit dem Radius $AB = Jz_1$.

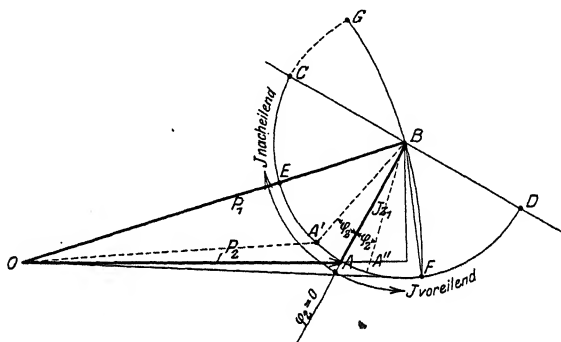


Fig. 31.

Die größten Werte, die φ_2 annehmen kann, sind bei einem Stromempfänger $\pm 90^\circ$, ihnen entsprechen die Punkte C und D auf dem zu AB senkrechten Durchmesser. C entspricht 90° Nacheilung von J gegen P_2 , also rein induktiver Belastung, D mit 90° Voreilung des Stromes gegen die Spannung reiner Kapazitätsbelastung. P_2 ist am kleinsten in Punkt E , hier haben P_2 und Jz_1 gleiche Richtung. P_2 wird bei Voreilung des Stromes auch größer als P_1 , es tritt also Spannungserhöhung ein.

In Punkt F ist $P_2 = P_1$. Die Bedingung hierfür ergibt sich wie folgt. Der Winkel um den Jz_1 gegen J voreilt, ist φ_k , s. Fig. 30 und Jz_1 eilt gegen P_2 um $(\varphi_k - \varphi_2)$ vor. In dem gleichschenkligen Dreieck OFB Fig. 31 wird, da hier $P_2 = P_1$ ist

$$P_2 \cos(\varphi_k - \varphi_2) = -\frac{Jz_1}{2}$$

$$\cos(\varphi_k - \varphi_2) = -\frac{Jz_1}{2P_1}.$$

Das negative Zeichen rechts rührt daher, daß die Projektion

von P_2 auf Jz_1 die entgegengesetzte Richtung hat wie diese Strecke. Daher ist $(\varphi_k - \varphi_2)$ größer als 90° , d. h. φ_2 ist negativ. Es ist

$$-\varphi_2 = \arccos\left(-\frac{Jz_1}{2P_1}\right) - \varphi_k.$$

Diese Gleichung liefert zwei Werte für φ_2 , einem Stromempfänger entspricht jener Wert, der kleiner als 90° ist. Der zweite Wert, für den $\varphi_2 > 90^\circ$ ist, ist der Punkt G .

Berechnung des Spannungsabfalles.

Im allgemeinen ist Jz_1 klein gegen P_2 und P_1 , so daß das Diagramm zur Berechnung des Spannungsabfalles zu ungenau wird. Man berechnet den Spannungsabfall wie folgt. Zerlegt man in Fig. 30 Jz_1 in eine Komponente in Richtung von P_2 und in eine senkrecht dazu, so wird die erste

$$Jz_1 \cos(\varphi_k - \varphi_2) = Jz_1 (\cos \varphi_k \cos \varphi_2 + \sin \varphi_k \sin \varphi_2).$$

Hierin ist

$$z_1 \cos \varphi_k = R_1 \quad \text{und} \quad z_1 \sin \varphi_k = X_1,$$

also

$$Jz_1 \cos(\varphi_k - \varphi_2) = JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2.$$

Ebenso wird die zweite Komponente

$$\begin{aligned} Jz_1 \sin(\varphi_k - \varphi_2) &= Jz_1 (\sin \varphi_k \cos \varphi_2 - \cos \varphi_k \sin \varphi_2) \\ &= JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2, \end{aligned}$$

daher wird

$$P_1 = \sqrt{(P_2 + JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2)^2 + (JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2)^2} \quad (52)$$

oder

$$P_2 = \sqrt{P_1^2 - (JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2)^2} - (JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2) \quad (53)$$

Mit diesen Gleichungen kann zu gegebenen Werten von P_2 , J , φ_2 , P_1 berechnet oder, wenn P_1 , J und φ_2 gegeben sind, P_2 ermittelt werden. Bei positiven Werten von φ_2 ist die auf P_2 senkrechte Komponente von Jz_1 , nämlich $JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2$ klein, und da sie quadratisch addiert wird, hat sie keinen großen Einfluß auf den Spannungsabfall. Dann ist nach Gl. 52 angenähert

$$P_1 \cong P_2 + JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2, \quad \dots \quad (52a)$$

woraus folgt, daß auf den Spannungsabfall hauptsächlich der Ohmsche Spannungsabfall des Wirkstromes $J \cos \varphi_2$ und der induktive Spannungsabfall des Blindstromes $J \sin \varphi_2$ einen Einfluß haben.

Die Gl. 52 kann zur graphischen Ermittlung der prozentualen

Spannungszunahme von den sekundären bis zu den primären Klemmen verwendet werden. Diese werde definiert durch

$$\varepsilon^0/0 = \frac{P_1 - P_2}{P_2} 100 = \left(\frac{P_1}{P_2} - 1 \right) 100.$$

Nach Gl. 52 wird

$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\left(1 + \frac{JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2}{P_2} \right)^2 + \left(\frac{JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2}{P_2} \right)^2}$$

$$= \sqrt{(1 \pm \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$\varepsilon = \frac{P_1}{P_2} - 1 = \sqrt{1 \pm 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2} - 1.$$

Durch Reihenentwicklung wird

$$\varepsilon = \frac{\pm 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \frac{4\alpha^2 \pm 4\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}{8} + \dots$$

$$= \pm \alpha + \frac{\beta^2}{2} \pm \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{2} - \dots$$

Hierin ist das dritte Glied schon vernachlässigbar klein und daher

$$\varepsilon = \pm \alpha + \frac{\beta^2}{2}.$$

Drückt man α und β in $\%$ aus,

$$\alpha = \frac{JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2}{P_2} 100,$$

$$\beta = \frac{JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2}{P_2} 100,$$

so wird

$$\varepsilon^0/0 = \pm \alpha + \frac{\beta^2}{200} \dots \dots \dots (54)$$

Graphisch ermittelt man α und β nach Fig. 32. Man macht

$$AB = \frac{JR_1}{P_2} 100, \quad BC = \frac{JX_1}{P_2} 100, \quad AC = \frac{Jz_1}{P_2} 100$$

und schlägt einen Kreis über AC als Durchmesser. Ein Strahl AD der gegen J unter dem Winkel φ_2 angetragen wird, fällt somit in die Richtung von P_2 . Daher ist $AD = \alpha$ und $DC = \beta$ in $\%$ von P_2 .

16. Beispiel.

In einer Arbeitsübertragung über eine Leitung mit Widerstand und Selbstinduktion arbeiten die Stromempfänger mit konstanter Phasenverschiebung φ_2 unabhängig von der Belastung. Die primäre Klemmenspannung P_1 ist konstant.

Verlauf der sekundären Spannung als Funktion des Stromes.

Da φ_2 konstant ist, kann Gl. 52 in der Form geschrieben werden:

$$[P_2 + J z_1 \cos(\varphi_k - \varphi_2)]^2 + J^2 z_1^2 \sin^2(\varphi_k - \varphi_2) = P_1^2$$

oder nach Ausmultiplikation

$$P_2^2 + (J z_1)^2 + 2 P_2 J z_1 \cos(\varphi_k - \varphi_2) = P_1^2 \quad . \quad (55)$$

Dividiert man durch P_1^2 und setzt $\frac{P_2}{P_1} = J_k$, wobei J_k der Kurzschlußstrom ist, den man bei widerstandslos verbundenen sekundären Klemmen erhält, so wird endlich

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 + \left(\frac{J}{J_k}\right)^2 + 2 \left(\frac{P_2}{P_1}\right) \left(\frac{J}{J_k}\right) \cos(\varphi_k - \varphi_2) = 1 \quad . \quad (55a)$$

In dieser Gleichung zweiten Grades ist die Beziehung zwischen J und P_2 indirekt durch die Verhältnisse $\frac{P_2}{P_1}$ und $\frac{J}{J_k}$ ausgedrückt. Die Diskriminante der Glieder zweiten Grades ist

$$1 - \cos^2(\varphi_k - \varphi_2),$$

sie ist positiv, da das Quadrat des \cos kleiner oder höchstens gleich eins ist, die Gleichung stellt daher eine Ellipse dar. Trägt man

die $\frac{J}{J_k}$ als Abszissen und die $\frac{P_2}{P_1}$ als Ordinaten auf, so sind die Schnittpunkte mit der Ordinatenachse für $J=0$, $\frac{P_2}{P_1}=1$, und mit der Abszissenachse für $P_2=0$, $\frac{J}{J_k}=1$.

Die Hauptachsen der Ellipse bilden mit den Koordinatenachsen einen Winkel von 45° und sind

$$\frac{1}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\varphi_k - \varphi_2}{2}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\varphi_k - \varphi_2}{2}\right)}.$$

In dem besonderen Falle, daß $\cos(\varphi_k - \varphi_2) = 0$, also $\varphi_2 = \varphi_k \mp 90^\circ$ ist, stellt die Gleichung einen Kreis dar. Nur das obere (—) Zeichen gibt einen Winkel φ_2 , der kleiner als 90° ist, wie es einem Stromempfänger entspricht, und zwar wird hierbei φ_2 negativ. Dieser Fall entspricht einer Verzögerung von P_2 gegen J .

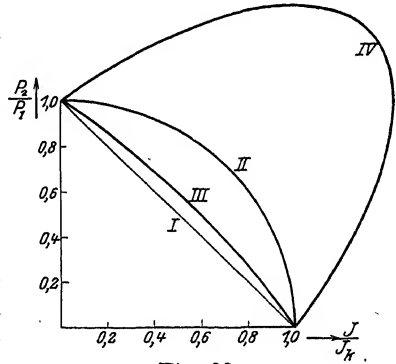


Fig. 33.

Ist ferner $\cos(\varphi_k - \varphi_2) = 1$, also $\varphi_2 = \varphi_k$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{P_2}{P_1} + \frac{J}{J_k} = 1$$

und stellt somit eine Gerade dar.

Für $\varphi_k = 45^\circ$, wobei $R_1 = X_1$ ist, sind in Fig. 33 die Gerade I für $\varphi_2 = 45^\circ$, der Kreis II für $\varphi_2 = -45^\circ$, ferner die Ellipse III für $\varphi_2 = 0$ und $+90^\circ$ aufgetragen (die bei $\varphi_k = 45^\circ$ zusammenfallen), während die Ellipse IV für $\varphi_2 = -90^\circ$, also reine Kapazitätsbelastung gilt.

Dieses Diagramm gilt allgemein für einen Stromkreis mit konstanter Phasenverschiebung, der von einer konstanten Spannung über einen Scheinwiderstand gespeist wird. Es ist von Oehlschläger zur Darstellung des Spannungsabfalles eines Wechselstromgenerators abgeleitet worden. Dort entspricht unserem P_1 die induzierte EMK des Generators, dem Leitungswiderstand R_1 der Ohmsche Widerstand, und dem Blindwiderstand X_1 der durch Ankerrückwirkung und Streuung bedingte Blindwiderstand des Generators. Beim Generator ist allerdings X_1 keine konstante Größe, und daher gilt dort das Diagramm nicht streng.

Maximale Leistung.

Setzt man in Gl. 55 für den Strom $J = \frac{P_2}{z_2}$, so wird

$$P_2^2 = \frac{P_1^2 z_2^2}{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 \cos(\varphi_k - \varphi_2)}$$

und die Leistung an den sekundären Klemmen

$$N_2 = P_2 J_2 \cos \varphi_2 = \frac{P_2^2}{z_2} \cos \varphi_2 = \frac{P_1^2 z_2 \cos \varphi_2}{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 \cos(\varphi_k - \varphi_2)}.$$

Sie wird ein Maximum, wenn $\frac{dN_2}{dz_2} = 0$, als wenn

$$z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 \cos(\varphi_k - \varphi_2) = z_2 [2z_2 + 2z_1 \cos(\varphi_k - \varphi_2)]$$

$$z_2 = z_1$$

ist. Hierbei ist die Sekundärspannung

$$P_2 = J z_2 = J z_1.$$

Die größte Leistung an den Sekundärklemmen ergibt sich, wenn die Klemmenspannung P_2 an der Belastung gleich dem Spannungsabfall $J z_1$ in der Leitung ist. Dies gilt unabhängig von der Phasenverschiebung φ_2 . Die größte

Leistung selbst ist dagegen von ihr abhängig. Durch Einsetzen von $z_2 = z_1$ wird

$$N_{2\max} = \frac{P_2^2 \cos \varphi_2}{2z_1 [1 + \cos(\varphi_k - \varphi_2)]} \dots \dots (56)$$

Für das absolute Maximum erhält man aus $\frac{dN_{2\max}}{d\varphi_2} = 0$

$$-\sin \varphi_2 [1 + \cos(\varphi_k - \varphi_2)] = \cos \varphi_2 \sin(\varphi_k - \varphi_2)$$

oder

$$\sin \varphi_2 = -\sin \varphi_k$$

$$\varphi_2 = -\varphi_k.$$

Es wird also in Gl. 56, da $\varphi_k - \varphi_2 = 2\varphi_k$,

$$1 + \cos(\varphi_k - \varphi_2) = 2 \cos^2 \varphi_k,$$

und da

$$z_1 \cos \varphi_k = R_1,$$

wird

$$N_{2\max} = \frac{P_1^2}{4R_1} \dots \dots \dots (57)$$

Stromdiagramm.

Als Anwendungsbeispiel für die Inversion werde das Stromdiagramm auf diesem Wege abgeleitet.

Wir wollen die konstante Primärspannung in die positive Y -Achse legen, die Wirkströme sind dann die Ordinaten, die Blindströme die Abszissen des Stromdiagramms, und zwar liegen nacheilende Blindströme in der positiven X -Achse, voreilende in der negativen.

Da man von der Reihenschaltung der Scheinwiderstände $z_1 + z_2$ durch einmalige Inversion zu den Leitwerten bzw. den Strömen gelangt, verwendet man das Spiegelbild der Scheinwiderstände, indem man positive Blindwiderstände gegen die Wirkwiderstände um 90° nach rückwärts, negative nach vorwärts gedreht aufrägt. Somit

macht man in Fig. 34 in Richtung der positiven X -Achse $OC = X_1$, senkrecht dazu $CD = R_1$, dann ist $OD = z_1$. Wird ferner ein beliebiger Wert von $X_2 = DH$, der dazugehörige von $R_2 = HE$ aufgetragen, so ist $DE = z_2$, $\sphericalangle DEH = \varphi_2$ und $OE = OD + DE = z_1 + z_2$.

Bei Veränderung des Betrages von z_2 bei konstantem φ_2 be-

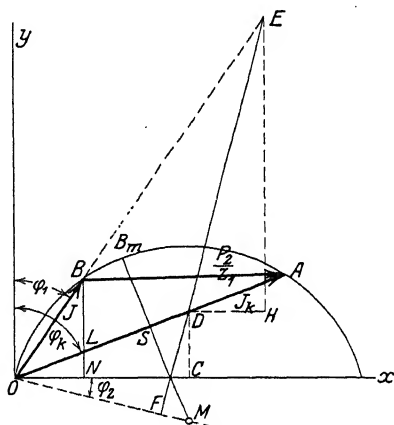


Fig. 34.

wegt sich Punkt E auf der Geraden DE , sie ist der Ort des Vektors, der den resultierenden Scheinwiderstand $\dot{z}_1 + \dot{z}_2$ darstellt.

Der Ort der resultierenden Leitwerte bzw. der Ströme ist daher ein Kreis durch den Ursprung, dessen Mittelpunkt M auf einem Lot OF vom Ursprung auf die Gerade DE liegt.

Der Radius OM erscheint gegen die positive X -Achse um denselben Winkel φ_2 zurückgedreht, wie die Gerade DE gegen die Ordinatenachse.

Da wir von dem Spiegelbild der Scheinwiderstände ausgingen, bezeichnet die Zurückdrehung des Radius um φ_2 eine Nacheilung von J gegen P_2 , bei Voreilung ist der Radius um φ_2 gegen die X -Achse nach vorwärts gedreht.

Die Vektoren von O nach dem Kreisbogen OBA stellen alle möglichen Ströme von $z_2=0$ bis $z_2=\infty$ dar. Für $z_2=0$ (kurzgeschlossene Leitung) ist Punkt A invers zu D und im Strommaßstab $OA = \frac{P_1}{z_1} = J_k$ um $\varphi_k = \arctg \frac{X_1}{R_1}$ gegen P_1 verzögert. $OB = J$ ist invers zu E und stellt den Strom für den durch DE dargestellten Wert von z_2 dar, er ist gegen P_1 um φ_1 verzögert. Dem unendlich fernen Punkt der Geraden ($z_2 = \infty$) entspricht der Ursprung O und $J=0$ (offene Leitung). Da $OA = J_k$ unabhängig von der Belastungsart ist, gehen alle Kreise für verschiedene Werte von φ_2 durch A , alle Kreismittelpunkte liegen auf dem Mittellot MS auf OA .

Die Ordinate BN von $OB = J$ ist der Wirkstrom $J \cos \varphi_1$, daher auch ein Maß für die zugeführte Leistung $N_1 = P_1 J \cos \varphi_1$. Der Ordinatenabschnitt BL verhält sich zu BN wie $R_2 : R_1 + R_2$. Daher stellt BL

$$J^2 R_2 = P_2 J \cos \varphi_2 = N_2$$

im gleichen Maßstab dar wie BN

$$J^2 (R_1 + R_2) = P_1 J \cos \varphi_1 = N_1.$$

Der Ordinatenabschnitt zwischen dem Kreis und der Geraden OA ist proportional der sekundären Leistung, das Verhältnis $BL:BN$ des Wirkungsgrad $N_2:N_1$.

N_2 ist am größten für B_m auf dem Mittellot auf OA . Da

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{S}_{\dot{z}_1}$$

war, wird auch

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\dot{z}_1} = \frac{\mathfrak{P}_2}{\dot{z}_1} + \mathfrak{S}.$$

Im Diagramm ist $OA = \frac{P_1}{z_1} = J_k$, $OB = J$, daher die dritte Seite

$AB = \frac{P_2}{z_1}$, sie verhält sich zu OA wie $P_2:P_1$. Aus dem Diagramm ist daher ferner ersichtlich, daß für maximale Leistung (Punkt B_m) $P_2 = J z_1$ ist, wie früher abgeleitet.

Eine Verallgemeinerung dieses Diagramms findet sich in Kap. XII.

17. Leistungsmessung nach der Drei-Voltmeter-Methode.

Ist ein Stromverbraucher in Reihe mit einem Ohmschen Widerstand R geschaltet, so lautet Gl. 55

$$P_1^2 = P_2^2 + (JR)^2 + 2P_2(JR)\cos\varphi_2,$$

und hiermit wird die sekundäre Leistung

$$N_2 = P_2 J \cos\varphi_2 = \frac{P_1^2 - P_2^2 - (JR)^2}{2R} \quad \dots (58)$$

Man mißt also mittels je eines Voltmeters (s. Fig. 35) die Gesamtspannung P_1 , den Spannungsabfall im Widerstand und die Spannung an dem Stromverbraucher und berechnet die Leistung nach Formel 58.

Diese Methode ist von Swinburne, Ayrton und Sumpner angegeben worden. Sie hat den Nachteil, daß ein ziemlich großer Widerstand erforderlich ist.

Damit die Genauigkeit der Messung groß wird, soll möglichst $JR = P_2$ sein, damit wird aber der Verlust im Widerstand $J^2R = P_2J$,

also $\frac{1}{\cos\varphi_2}$ mal so groß wie die zu messende Leistung.

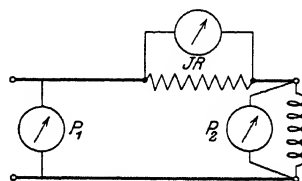


Fig. 35.

Fünftes Kapitel.

Parallelschaltung von Stromkreisen.

18. Grundgesetz für die Parallelschaltung von Stromkreisen. — 19. Der resultierende Scheinwiderstand von zwei parallelgeschalteten Zweigen. — 20. Stromresonanz. — 21. Leistungsmessung nach der Drei-Amperemeter-Methode. — 22. Korrektionsformeln für Leistungsmesser.

18. Grundgesetz für die Parallelschaltung von Stromkreisen.

Sind mehrere Stromkreise parallel geschaltet, so haben alle die gleiche Spannung. Jeder Zweigstrom ergibt sich durch Division der Klemmenspannung durch den Scheinwiderstand des Zweiges, und der Gesamtstrom ist die geometrische Summe der Zweigströme. Es ist

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}_1} = \mathfrak{P} \eta_1 = \mathfrak{P} (g_1 + j b_1)$$

$$\mathfrak{I}_2 = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}_2} = \mathfrak{P} \eta_2 = \mathfrak{P} (g_2 + j b_2)$$

$$\mathfrak{I}_3 = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}_3} = \mathfrak{P} \eta_3 = \mathfrak{P} (g_3 + j b_3)$$

.....

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 + \dots &= \mathfrak{P} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}_1} + \frac{1}{\mathfrak{z}_2} + \frac{1}{\mathfrak{z}_3} + \dots \right) = \mathfrak{P} \frac{1}{\mathfrak{z}} \\ &= \mathfrak{P} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots) = \mathfrak{P} \eta \\ &= \mathfrak{P} [g_1 + g_2 + g_3 + \dots + j(b_1 + b_2 + b_3 + \dots)]. \end{aligned}$$

Der resultierende Scheinwiderstand der Parallelschaltung ist

$$\frac{1}{\mathfrak{z}} = \sum \left(\frac{1}{\mathfrak{z}_v} \right) = \frac{1}{\mathfrak{z}_1} + \frac{1}{\mathfrak{z}_2} + \frac{1}{\mathfrak{z}_3} + \dots, \dots \dots (59)$$

der resultierende Scheinleitwert

$$\eta = \sum (\eta_v) = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots = g + j b, \dots (60)$$

worin

$$g = g_1 + g_2 + g_3 + \dots = \sum (g_v) \dots \dots \dots (61)$$

$$b = b_1 + b_2 + b_3 + \dots = \sum (b_v) \dots \dots \dots (62)$$

Die Phasenverschiebung des resultierenden Stromes ist.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g} = \frac{\Sigma(b_v)}{\Sigma(g_v)}.$$

Man addiert die Wirkströme und die Blindströme bzw. die ihnen entsprechenden Wirk- und Blindleitwerte und setzt sie geometrisch zu dem resultierenden Strom bzw. zu dem resultierenden Scheinleitwert zusammen.

19. Der resultierende Scheinwiderstand von zwei parallelgeschalteten Zweigen.

Nach Gl. 59 ist

$$\frac{1}{\mathfrak{z}} = \frac{1}{\mathfrak{z}_1} + \frac{1}{\mathfrak{z}_2}$$

oder

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \quad \dots \quad (63)$$

Um diesen Scheinwiderstand graphisch zu ermitteln, verfährt man wie folgt. Durch Division durch \mathfrak{z}_1 wird

$$\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_1} = \frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2}.$$

Bezeichnet man die Summe $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$ mit \mathfrak{z}' und setzt die Phasenwinkel $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi'$, so wird auch

$$\frac{z e^{j\varphi}}{z_1 e^{j\varphi_1}} = \frac{z_2 e^{j\varphi_2}}{z' e^{j\varphi'}}.$$

Diese Gleichung zerfällt in zwei, die erste ist

$$\frac{z}{z_1} = \frac{z_2}{z'},$$

die zweite

$$\varphi - \varphi_1 = \varphi_2 - \varphi'.$$

Es verhält sich also der Betrag des resultierenden Scheinwiderstandes z zu dem des einen Zweiges, wie der des anderen Zweiges zur Summe, und die entsprechenden Phasendifferenzen sind gleich.

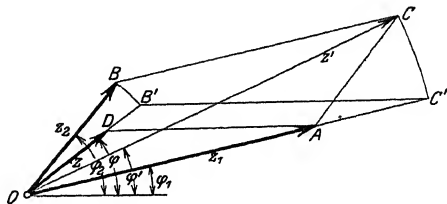


Fig. 36.

Trägt man daher (s. Fig. 36) $OA = z_1$, $OB = z_2$ nach Größe und Phase φ_1 bzw. φ_2 gegen eine Anfangslage auf, so ist OC ihre Summe z' . Macht man nun das Dreieck ADO ähnlich dem Dreieck

CBO , so ist OD der gesuchte Scheinwiderstand z nach Größe und Phase. Zur Konstruktion braucht man nur das Dreieck OBC nach $OB'C'$ zu legen und durch A die Parallele AD zu $C'B'$ zu ziehen.

Beispiel. In einem Stromkreis seien eine Anzahl Glühlampen in Reihe und zu jeder eine Drosselspule parallel geschaltet, um beim Durchbrennen einer Lampe eine Unterbrechung des ganzen Stromkreises zu verhindern (s. Fig. 37). Es soll untersucht werden, wie sich beim Erlöschen einzelner Lampen der Strom und damit die

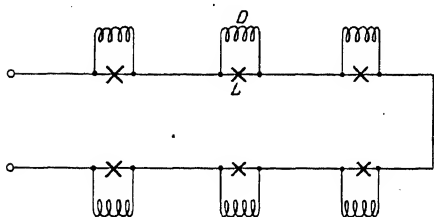


Fig. 37.

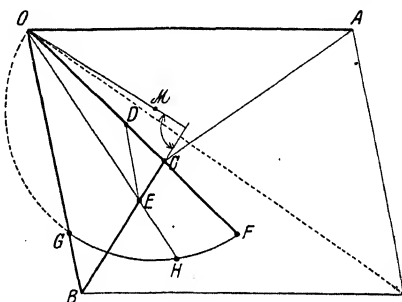


Fig. 38.

Helligkeit der übrigen Lampen ändert, wenn die Klemmenspannung des ganzen Stromkreises konstant gehalten wird.

Sei R_1 der Widerstand einer Lampe, R_2 , X_2 , z_2 sind die Konstanten einer Drosselspule.

Ist z der aus der Parallelschaltung von R_1 und z_2 resultierende Scheinwiderstand, J der Gesamtstrom, so ist die Spannung einer Gruppe

$$P' = Jz$$

und der Lampenstrom

$$J_1 = \frac{P'}{R_1} = \frac{Jz}{R_1},$$

d. h. der Lampenstrom ist stets dem Gesamtstrom proportional und ändert sich wie dieser, man braucht daher nur die Änderung des Gesamtstromes zu untersuchen.

Die Aufgabe möge graphisch mittels der Inversion behandelt werden. In Fig. 38 ist $OA = R_1$, $OB = z_2$ (und zwar das Spiegelbild) und OC der resultierende Scheinwiderstand z .

Vergrößert man den Maßstab auf den n -fachen Betrag, wobei n die Zahl der Gruppen ist, so ist $OC = nz$ der Scheinwiderstand, wenn alle Lampen brennen, und $OB = nz_2$, wenn keine Lampe brennt.

Sind m Lampen erloschen, so sind die Scheinwiderstände $(n-m)z$ und mz_2 zu addieren. Macht man $CD:OC = m:n$, $CD = mz$, so daß $OD = (n-m)z$ ist, und zieht DE parallel zu OB , so wird $DE = \frac{m}{n} OB = mz_2$. OE ist also die Summe aus $(n-m)z$ und

mz_2 . Ändert sich m , so bewegt sich E auf der Geraden CB derart, daß $CE:CB = m:n$ ist. CB ist das Diagramm der Scheinwiderstände.

Das Stromdiagramm bei konstanter Spannung ist daher der zur Geraden CB inverse Kreisbogen FHG , dessen Mittelpunkt M auf dem Lot von O auf CB liegt. OF stellt den Gesamtstrom nach Größe und Phase dar, wenn alle Lampen brennen, OG wenn keine Lampe brennt und OH wenn m Lampen erloschen sind. H wandert bei Änderung der Zahl m auf dem Kreis von F bis G .

Man sieht, daß bei konstanter Klemmenspannung die Stromänderung sehr bedeutend werden kann. Sie wird um so kleiner, je weniger $z = OC$ sich von z_2 unterscheidet. Da

$$\delta = \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{\delta_2}{1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}},$$

ist dies aber nur der Fall, wenn δ_2 klein gegen δ_1 , d. h. der Strom in der Doppelspule groß gegen den Lampenstrom ist, dann ist der Wirkungsgrad der Anlage schlecht. Es ist daher zweckmäßiger, die Stromquelle nicht auf konstante Spannung, sondern auf konstanten Strom zu regulieren. Wie die Spannung hierbei zu ändern ist, gibt die Gerade CB an.

20. Stromresonanz.

Ein Kondensator und eine Drosselspule sind parallelgeschaltet (Fig. 39). Die Scheinwiderstände der beiden Zweige sind:

$$\delta_i = R_i + j\omega L, \quad \delta_c = R_c - \frac{j}{\omega C},$$

Der Scheinwiderstand der Parallelschaltung ist nach Gl. 63

$$\delta_p = \frac{R_i R_c + \frac{L}{C} + j \left(\omega L R_c - \frac{R_i}{\omega C} \right)}{R_i + R_c + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

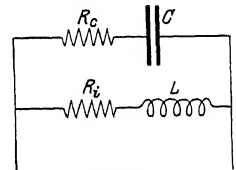


Fig. 39.

Macht man den Nenner reell, so erhält man den Wirk- und den Blindwiderstand der Parallelschaltung

$$R_p = \frac{R_c [R_i^2 + (\omega L)^2] + R_i \left[R_c^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}{(R_i + R_c)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \dots (64)$$

$$X_p = \frac{\frac{1}{\omega C} \left[\frac{L}{C} - R_i^2 \right] - \omega L \left[\frac{L}{C} - R_c^2 \right]}{(R_i + R_c)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \dots (65)$$

Wird X_p Null, so verhält sich der Stromkreis wie eine reine Widerstand. X_p wird zunächst Null, wenn $\omega = 0$ oder ω ist. Gleichstrom ($\omega = 0$) fließt nur durch die Drosselspule, der Gesamtwiderstand ist R_1 . Ein Strom von sehr hoher Frequenz $\omega \rightarrow \infty$ fließt nur durch den Kondensator, der Gesamtwiderstand ist R_2 .

X_p wird ferner Null, wenn

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \left| \begin{array}{l} L \\ C \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \end{array}$$

a) Die Widerstände sind gleich $R_1 = R_2 = R$ (oder R Null sein kann), aber der Wert $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ sei ausgeschlossen. Die Wurzel in Gl. 66 wird 1 und

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Bei dieser Frequenz heben sich die Blindströme auf. Aus Gl. 64 hierbei

$$R_p = \frac{z^2}{2R} = \frac{z}{2\cos\varphi}$$

wo z der Scheinwiderstand jedes Zweiges, $z \cos\varphi$ sein Phasenwiderstand. Der Gesamtstrom ist $2\cos\varphi$ mal so groß wie jeder Zweigstrom. Kleine Verluste ($\cos\varphi$ klein) stellt die Parallelschaltung bei der Frequenz ω_0 fast eine Unterbrechung einer Leitung dar, analog wie die Reihenschaltung von Drosselspule und Kondensator bei der gleichen Frequenz bei kleinen Verlusten nahezu einen Kurzschluß darstellt. Dort waren die Teilspannungen viel größer als die Gesamtspannung, man sprach von Spannungsresonanz, hier können die Teilströme gegen den Gesamtstrom sehr groß werden, man nennt dies Stromresonanz. Sind z. B. die Verluste jedes Zweiges je 2% von Scheinleistung ($\cos\varphi = 0,98$), so ist jeder Zweigstrom 25 mal so groß wie der Gesamtstrom.

Eine solche Schaltung bietet Strömen von verschiedener Frequenz sehr verschiedene Scheinwiderstände.

Wir stellen diese in Abhängigkeit von der Frequenz ω und durch das Frequenzverhältnis und das Widerstandsverhältnis von der Reihenschaltung dar und setzen

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega = \delta \quad R \left| \begin{array}{l} L \\ C \end{array} \right| \quad (R + j\omega L) = R \left(1 + j \frac{\delta}{\omega_0} \right) \quad \left(R + \frac{j}{\omega C} \right) = R \left(1 - \frac{j}{\delta} \right)$$

Es wird

$$\delta_p = R \frac{(1 + \varrho^2) + j\varrho\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)}{2\varrho^2 + j\varrho\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)}$$

und der Betrag

$$z_p = R \sqrt{\frac{(1 + \varrho^2)^2 + \varrho^2\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)^2}{4\varrho^4 + \varrho^2\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)^2}}$$

Für $\omega = \omega_0$, $\delta = 1$ wird der Wirkwiderstand bei Resonanz

$$R_0 = R \frac{1 + \varrho^2}{2\varrho^2} \quad \dots \dots \dots (68)$$

und endlich

$$\frac{z_p}{R_0} = \frac{2\varrho}{1 + \varrho^2} \sqrt{\frac{(1 + \varrho^2)^2 + \varrho^2\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)^2}{4\varrho^2 + \left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)^2}} \quad \dots \dots (69)$$

Bei kleinen Verlusten ergibt sich ein sehr ähnlicher Verlauf $z_p = f(\omega)$ wie für die Leitwerte bei der Spannungsresonanz mit scharf ausgeprägtem Maximum. Bei größeren Widerständen ist das Verhalten verschieden; die Kurve läuft für ω Null und unendlich nicht nach Null, sondern nach R . Wird $\varrho = 1$, d. h. $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, so erhält

man in Gl. 66 den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$. Nach Gl. 68 u. 69 wird $z_p = R_0 = R$. Der Stromkreis verhält sich bei allen Frequenzen wie ein konstanter Ohmscher Widerstand.

Wird endlich $\varrho > 1$, so ist in Gl. 66 die zweite Wurzel wieder gleich 1, bei der Frequenz ω_0 hat man aber nicht ein Widerstandsmaximum sondern ein Minimum.

Fig. 40 zeigt $\frac{z_p}{R_0}$ als Funktion von $\frac{\omega}{\omega_0}$ für $\varrho = 0,1, 0,5, 1$ und 2.

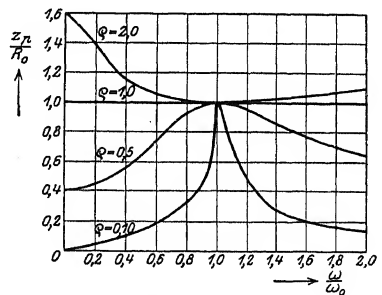


Fig. 40.

b) Sind die Widerstände ungleich aber klein gegen $\sqrt{\frac{L}{C}}$, so ist das Verhalten ähnlich dem bei gleichen Widerständen. Ist ein Wider-

stand größer als $\sqrt{\frac{L}{C}}$, der andere kleiner, so ist in Gl. 66 die zweite Wurzel imaginär, es gibt dann keine Frequenz mehr, bei der die Blindströme sich aufheben.

21. Leistungsmessung nach der Drei-Amperemeter-Methode.

Entsprechend der Methode der Leistungsmessung mit drei Voltmetern hat Fleming eine solche mit drei Amperemetern angegeben. Schaltet man zu einem Stromkreis, der bei der Spannung P einen Strom J_1 unter einem Phasenwinkel φ aufnimmt, einen Ohmschen Widerstand R parallel, so nimmt dieser einen Strom $J_2 = \frac{P}{R}$ auf, der gegen J_1 um φ voreilt. Der Gesamtstrom wird

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2 J_1 J_2 \cos \varphi.$$

Die Leistung des Stromes J_1 ist

$$N = P J_1 \cos \varphi = J_1 J_2 R \cos \varphi$$

und daher

$$N = \frac{(J^2 - J_1^2 - J_2^2) R}{2} \quad \dots (70)$$

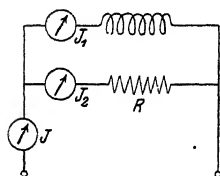


Fig. 41.

Man mißt (s. Fig. 41) die Teilströme und den Gesamtstrom und berechnet die Leistung nach Gl. 70.

Die Messung hat aber den gleichen Nachteil wie die mit drei Voltmetern.

22. Korrektionsformeln für Leistungsmesser.

Die meist verwendeten Leistungsmesser beruhen auf dem elektrodynamischen Prinzip. Sie besitzen eine feste, vom Hauptstrom i des zu messenden Kreises durchflossene „Stromspule“, in deren magnetischem Feld eine drehbare Spule schwingt, die den Zeiger trägt, und die im Nebenschluß zu dem zu messenden Stromkreis liegt. Der Nebenschlußstrom i_n hängt von der Spannung ab, und das mittlere Drehmoment ist proportional dem Mittelwert $M(i i_n)$. Der Ausschlag α ist dem Drehmoment proportional. Ist C die Konstante des Instruments, so ist $C\alpha = M(i i_n)$.

Der Hauptstrom sei um φ gegen die Spannung verzögert, der Nebenschlußstrom um φ_n , wobei $\varphi_n = \arctg \frac{\omega L_n}{R_n}$ ist.

L_n ist die Induktivität, R_n der Widerstand der Spannungsspule.

$$\begin{aligned} C\alpha = M(i i_n) &= J J_n \cos(\varphi - \varphi_n) = J \frac{P}{\sqrt{R_n^2 + (\omega L_n)^2}} \cos(\varphi - \varphi_n) \\ &= J \frac{P}{R_n} \cos(\varphi - \varphi_n) \cos \varphi_n. \end{aligned}$$

Die Leistung ist

$$N = P J \cos \varphi.$$

Daher wird
$$N = C \alpha R_n \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi - \varphi_n) \cos \varphi_n}$$

oder
$$N = C \alpha R_n \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_n}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_n} \dots \dots \dots (71)$$

Damit der Ausschlag der Leistung genau proportional ist, muß $\operatorname{tg} \varphi_n$ verschwindend klein sein, dies wird durch große Vorschaltwiderstände R_n erreicht.

Die gemessene Leistung bedarf einer weiteren Korrektur, je nachdem die Spannungsspule an die Klemmen der Belastung oder an die Klemmen der Stromquelle geschaltet ist (s. Fig. 42a und b).

Wird die dem Stromverbraucher zugeführte Leistung gemessen, so ist bei der Schaltung Fig. 42a von der gemessenen Leistung der Verlust in der Spannungsspule $\frac{P^2}{R_n}$ zu subtrahieren, und bei Fig. 42b der Verlust in der Stromspule $J^2 R_s$.

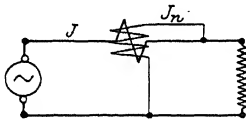


Fig. 42a.

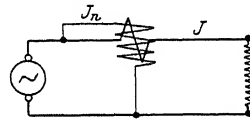


Fig. 42b.

Wird die Leistung des Generators gemessen, so sind die entsprechenden Beträge zu addieren.

Die Genauigkeit erfordert, daß die Schaltung gewählt wird, bei der die Korrektur am kleinsten ist.

Bei großer Spannung und kleinem Strom ist die Korrektur für die Stromspule meist kleiner und Schaltung Abb. 42b zu wählen, bei kleiner Spannung und großem Strom ist die Korrektur für die Spannungsspule meist kleiner und dann die Schaltung Abb. 42a vorzuziehen.

Sechstes Kapitel.

Zusammengesetzte Stromkreise.

23. Zwei parallelgeschaltete Impedanzen in Reihe mit einer dritten. — 24. Die Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom. — 25. Erzeugung von 90° Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. — 26. Die Schaltungen von Boucherot. — 27. Spannungsregelung einer Leitung durch Blindstrom. — 28. Berechnung von Stromverteilungen durch Superposition.

Unter zusammengesetzten Stromkreisen sollen solche verstanden werden, die z. T. durch Reihenschaltung und z. T. durch Parallelschaltung entstehen. An Hand einiger Beispiele soll die Anwendung der graphischen und symbolischen Methoden weiter geübt werden.

23. Zwei parallelgeschaltete Scheinwiderstände in Reihe mit einem dritten.

In einem Stromkreis sind nach Fig. 43 zwei parallele Scheinwiderstände z_1, z_2 mit einem dritten z_0 in Reihe geschaltet. Es soll untersucht werden, wann der resultierende Scheinwiderstand bei Unterbrechung eines Zweiges seinem Betrag nach unverändert bleibt.

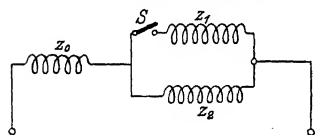


Fig. 43.

Es seien in Fig. 44 $z_1 = OA$ und $z_2 = OB$ unter ihren Phasenwinkeln φ gegen irgendeine Anfangsrichtung aufgetragen.

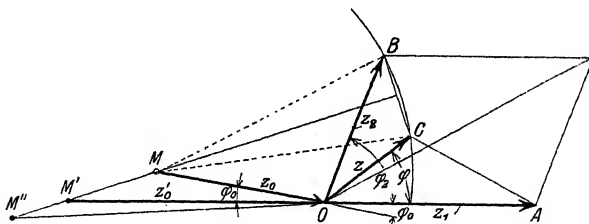


Fig. 44.

z_1 sei als Ohmseher Widerstand angenommen, als $\varphi_1 = 0$, so ist die Richtung OA die Anfangsrichtung, und $z_2 = OB$ eilt um $\varphi_2 = \arctg \frac{\omega L_2}{R_2}$ gegen OA vor.

$z = OC$ ist der nach Seite 51 ermittelte Scheinwiderstand der Parallelschaltung von z_1 und z_2 . Soll nun die geometrische Summe von z_0 und z ebenso groß sein wie die von z_0 und z_2 , so muß der Anfangspunkt M des Vektors $MO = z_0$ auf dem Mittellot in BC liegen, denn dann ist $MC = MB$.

Es gibt also eine große Zahl von Scheinwiderständen z_0 , bei denen dies möglich ist, jeder hat einen anderen Phasenwinkel φ_0 . MO ist gegen die Ausgangslage um φ_0 im Sinne der Verzögerung gedreht, d. h. z_0 enthält Widerstand und Kapazität. Liegt M in M' , so daß $z_0' = M'O$ in die Anfangsrichtung fällt, so ist z_0' ein induktionsfreier Widerstand; liegt endlich M in M'' , so daß $M''O$ gegen die Ausgangslage im Sinne der Voreilung gedreht ist, so ist Widerstand und Induktivität vorhanden.

Liegt das Lot auf BC parallel zur Ausgangsrichtung, so ist ein Schnitt mit ihr nicht mehr möglich, z_0 kann also nur noch Widerstand und Kapazität enthalten. Dies ist der Fall, wenn BC senkrecht zur Ausgangsrichtung liegt, d. h. wenn $z_2 \cos \varphi_2 = z \cos \varphi$ oder wenn R_2 gleich dem resultierenden Widerstand der Parallelschaltung von z_1 und z_2 ist.

24. Die Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom.

Die Scheinwiderstände der vier Brückenarme in Fig. 45 seien z_1, z_2, z_3, z_4 , ihre Phasenwinkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Damit das Galvanometer nicht ausschlägt, muß die Spannung zwischen den Punkten C und D Null sein, d. h. es muß die Spannung zwischen den Punkten A und C

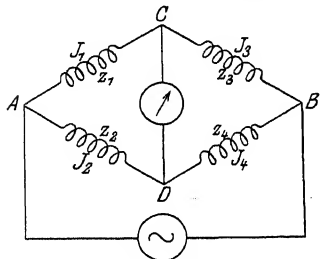


Fig. 45.

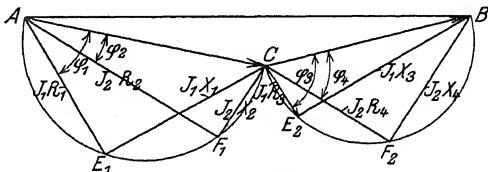


Fig. 46.

nach Größe und Phase gleich der zwischen A und D , und ebenso die Spannung zwischen C und B gleich der zwischen D und B sein. Dann ist aber auch $J_1 = J_3$ und $J_2 = J_4$. In dem Vektordiagramm Fig. 46 ist AB der Vektor der Klemmenspannung, sie besteht aus den beiden Teilspannungen

$$AC = J_1 z_1 = J_2 z_2$$

$$CB = J_3 z_3 = J_4 z_4,$$

und über diesen Spannungen sind die Spannungsdreiecke konstruiert. Durch Division der Spannungsgleichungen erhält man unter Berücksichtigung der Stromgleichungen

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{z_2}{z_4} \dots \dots \dots (72)$$

Die Phasendifferenz zwischen den Strömen ist

$$E_1 A F_1 = E_2 C F_2$$

oder

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4 \dots \dots \dots (73)$$

Die beiden Bedingungen, die erfüllt sein müssen, können am besten folgendermaßen geschrieben werden:

$$z_1 z_4 = z_3 z_2 \dots \dots \dots (72a)$$

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \dots \dots \dots (73a)$$

Es müssen erstens die Produkte der Beträge gegenüberliegender Scheinwiderstände und zweitens die Summen ihrer Phasenwinkel gleich sein.

Liegen an einem beliebigen Knotenpunkt zwei Ohmsche Widerstände, ist also z. B. $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$, so müssen die Phasenwinkel der beiden anderen Zweige gleich sein, d. h. $\varphi_2 = \varphi_4$. Liegen dagegen in gegenüberliegenden Zweigen der Brücke Ohmsche Widerstände, so sind die Phasenwinkel der beiden anderen auch gleich, sie haben aber entgegengesetztes Vorzeichen, d. h. liegt in dem einen eine Drosselspule, so muß in dem anderen ein Kondensator liegen. Es ergibt sich also die Möglichkeit einerseits Induktivitäten unter sich, andererseits eine Kapazität mit einer Induktivität in der Brücke zu vergleichen.

Vergleich von Induktivitäten. Es liegen in den Zweigen 1 und 2 die Widerstände R_1 und R_2 . In 3 und 4 liegen

$$z_3 = \sqrt{R_3^2 + (\omega L_3)^2} = R_3 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_3},$$

$$z_4 = \sqrt{R_4^2 + (\omega L_4)^2} = R_4 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_4}.$$

Da nun $\varphi_3 = \varphi_4$ werden soll, wird Gl. 72a

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \dots \dots \dots (74a)$$

und ferner

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \operatorname{tg} \varphi_4$$

$$\frac{\omega L_3}{R_3} = \frac{\omega L_4}{R_4}$$

oder

$$\frac{L_3}{L_4} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2} \dots \dots \dots (74b)$$

Man gleicht daher zunächst mit Gleichstrom ab, so daß die Bedingung 74a erfüllt ist; bei der Abgleichung mit Wechselstrom

wird dann die zweite Bedingung erfüllt. Diese gilt unabhängig von der Periodenzahl.

Vergleich von Induktivität und Kapazität. Hierbei liegen in den gegenüberliegenden Zweigen 1 und 4 Fig. 47 die Ohmschen Widerstände R_1 und R_4 , in 2 der Widerstand R_2 und die Induktivität L , in 3 die Kapazität C und parallel dazu der Widerstand R_3 .

Der Leitwert des Zweiges 3 ist

$$y_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{R_3}\right)^2 + (\omega C)^2} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = -\omega C R_3.$$

Der entsprechende Scheinwiderstand ist

$$z_3 = \frac{1}{y_3} = \frac{R_3}{\sqrt{1 + (\omega C R_3)^2}} = \frac{R_3}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_3}},$$

ferner

$$z_3 = \sqrt{R_3^2 + (\omega L_2)^2} = R_3 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}.$$

Aus Gl. 72a wird daher

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_3}}$$

oder, da dem absoluten Wert nach $\varphi_2 = \varphi_3$ sein soll,

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad \dots \dots \dots (75a)$$

Da $\operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{tg} \varphi_3$, wird ferner

$$\frac{\omega L}{R_2} = \omega C R_3$$

oder

$$\frac{L}{C} = R_2 R_3 = R_1 R_4 \dots \dots \dots (75b)$$

Nach Abgleichung der Widerstände mit Gleichstrom wird erst der Gl. 75a genügt, die Abgleichung mit Wechselstrom ergibt dann die Erfüllung der Beziehung 75b. Diese ist auch wieder von der Periodenzahl unabhängig.

Leistungsmessung mit der Brücke.

Zur Verlustmessung in Kondensatoren bei Hochspannung ist die Wattmetermethode ungeeignet. Eine von der Phys. Techn. Reichsanstalt verwendete Brückenschaltung¹⁾ zeigt Fig. 48. C_1 ist der zu untersuchende Kondensator, dessen Verlustwiderstand R_1 mit

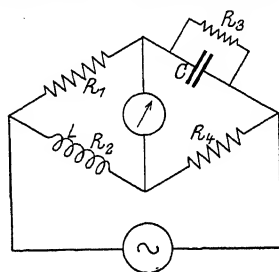


Fig 47.

¹⁾ Semm, Archiv f. Elektrotechnik, Bd. IX, 1920, S. 30.

C_1 in Reihe angenommen werde. C_2 ist ein verlustfreier (Luft-) Kondensator von bekannter Kapazität, R_3 und R_4 kapazitäts- und induktionsfreie Widerstände, C_4 ein veränderlicher geeichter Kondensator.

Da hier $\varphi_3 = 0$, $\varphi_2 = -90^\circ$ ist, wird

$$\varphi_1 + \varphi_4 = -90^\circ$$

und

$$\cos \varphi_1 = -\sin \varphi_4, \quad -\sin \varphi_1 = \cos \varphi_4.$$

Daher

$$z_1 z_4 = \frac{z_1}{y_4} = \frac{z_1 \cos \varphi_1}{-y_4 \sin \varphi_4} = \frac{R_1}{\omega C_4},$$

$$z_2 z_3 = \frac{R_4}{\omega C_2},$$

somit

$$R_1 = R_3 \frac{C_4}{C_2}.$$

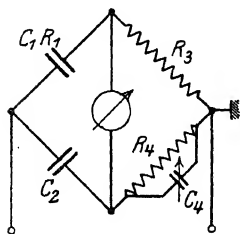


Fig. 42.

Ebenso wird

$$\frac{z_1}{y_4} = \frac{-z_1 \sin \varphi_1}{y_4 \cos \varphi_4} = \frac{1}{\omega C_1 R_4} = z_2 z_3 = \frac{R_3}{\omega C_2},$$

$$C_1 = C_2 \frac{R_4}{R_3}.$$

Der Verlust ist $N_1 = \left(\frac{P_1}{z_1}\right)^2 R_1$, worin P_1 die Spannung an C_1

und C_2 ist. Ist R_3 gegen den großen Widerstand R_1 zu vernachlässigen, so ist angenähert P_1 gleich der Spannung der Brücke P . Da

$$z_1 = \frac{R_1}{\cos \varphi_1} = \frac{R_1}{-\sin \varphi_4},$$

wird nach Einsetzen des Wertes von R_1

$$N_1 = \frac{P^2 C_2}{R_3 C_4} \sin^2 \varphi_4,$$

worin für kleine Winkel $-\sin \varphi_4 \cong -\operatorname{tg} \varphi_4 = R_4 \omega C_4$ gesetzt werden kann.

25. Erzeugung von 90° Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

Für Meßzwecke (Zähler) ist es oft nötig, eine Phasenverschiebung von genau 90° zwischen dem Strom einer Zählerspule und der Spannung zu erzeugen. Da eine Drosselspule stets einen gewissen Ohmschen Widerstand hat, ist der Strom gegen die Spannung an der Spule um weniger als 90° phasenverschoben, es sind daher besondere Schaltungen erforderlich, von denen einige hier beschrieben

werden sollen. (Eine ausführliche Zusammenstellung s. Waltz, ETZ 1905, S. 230.)

Methode von Hummel (Fig. 49). Parallel zur Zählerspule mit dem Scheinwiderstand z_0 liegt ein Ohmscher Widerstand R_1 und in Reihe mit beiden eine Drosselspule z_2 . Es soll nun der Strom J_0 der Zählerspule gegen die ganze Klemmenspannung P um genau 90° verzögert sein.

Fig. 50 zeigt das Vektordiagramm. Dem Strom J_0 eilt die

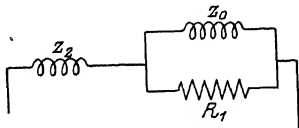


Fig. 49.

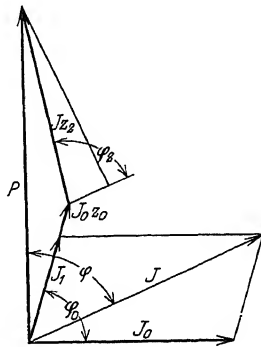


Fig. 50.

Spannung $J_0 z_0$ um $\varphi_0 = \arctg \frac{\omega L_0}{R_0}$ vor, in Phase mit $J_0 z_0$ liegt der Strom J_1 im Widerstand R_1 . Der Gesamtstrom J ist die Summe aus J_0 und J_1 , ihm eilt um $\varphi_2 = \arctg \frac{\omega L_2}{R_2}$ die Spannung $J z_2$ vor, die mit $J_0 z_0$ zusammen die Klemmenspannung P ergibt.

Die Beziehung zwischen den Scheinwiderständen, damit P gegen J_0 um 90° voreilt, ergibt sich wie folgt.

Es ist

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_0 \frac{\mathfrak{z}_0}{R_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_0 \frac{R_1 + \mathfrak{z}_0}{R_1},$$

ferner

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{S}_0 \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{S} \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{S}_0 \left(\mathfrak{z}_0 + \frac{R_1 + \mathfrak{z}_0}{R_1} \mathfrak{z}_2 \right) = \mathfrak{S}_0 \mathfrak{z}.$$

Das Verhältnis zwischen P und J_0 ist also durch den Scheinwiderstand \mathfrak{z} ausgedrückt, in diesem muß der Ohmsche Widerstand Null sein. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} &= R_0 + jX_0 + \frac{(R_1 + R_0 + jX_0)(R_2 + jX_2)}{R_1} \\ &= \frac{R_1(R_0 + R_2) + R_0 R_2 - X_0 X_2 + j[(R_1 + R_0)X_2 + X_0(R_1 + R_2)]}{R_1}. \end{aligned}$$

Der reelle Teil wird Null, wenn

$$R_1 = \frac{X_0 X_2 - R_0 R_2}{R_2 + R_2} \dots \dots \dots (76)$$

ist. Der Blindwiderstand ist

$$X = \frac{(R_1 + R_0) X_2 + (R_1 + R_2) X_0}{R_1}.$$

Setzt man den Wert aus (76) für R_1 ein, so wird

$$X = \frac{X_0 z_2^2 + X_2 z_0^2}{X_0 X_2 - R_0 R_2}. \quad \dots \dots \dots (77)$$

Methode von Görges (Fig. 51). Hier liegen zwei Zählerspulen, deren Scheinwiderstand z_0 sei, in zwei gegenüberliegenden Zweigen einer Brücke, in den beiden anderen Zweigen gleichgroße Ohmsche Widerstände R_1 . Die Punkte C und D der Brücke sind durch den Ohmschen Widerstand R_2 verbunden, und vor die Brücke ist eine Drosselspule z_3 geschaltet.

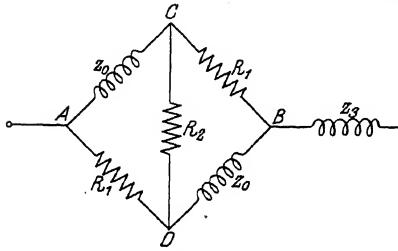


Fig. 51.

Aus der Symmetrie folgt, daß die Ströme und Spannungen der beiden Spulen z_0 unter sich und ebenso die der beiden Widerstände R_1 unter sich gleichgroß und in Phase sind. In dem Diagramm Fig. 52 bilden also die Spannungen der vier Brückenzweige ein Parallelogramm $ACBD$, in dem $AC = DB = J_0 z_0$ ist und gegen J_0 um $\varphi_0 = \arctg \frac{\omega L_0}{r_0}$ voreilt, während $AD = CB = J_1 R_1$ in Phase mit J_1 ist. DC ist

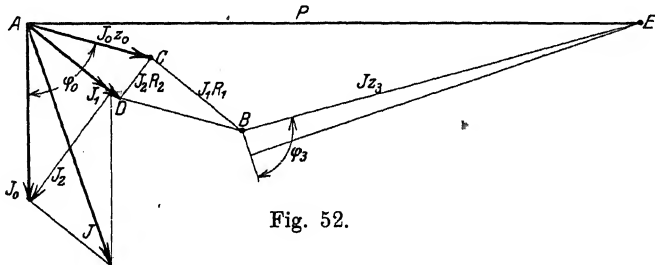


Fig. 52.

die Spannung zwischen den Punkten D und C der Brücke und gleich $J_2 R_2$ in Phase mit dem Strom J_2 , der sich als geometrische Differenz von J_1 und J_0 ergibt. Die Spannung an der ganzen Brücke ist die Summe aus $J_0 z_0$ und $J_1 R_1$ und gleich AB , und der gesamte Strom J die geometrische Summe aus J_0 und J_1 . An AB reiht sich nun die Spannung $J z_3$ der Drosselspule, so daß die Klemmenspannung $P = AE$ dem Strom J_0 um 90° voreilt.

26. Die Schaltungen von Boucherot.

Von Boucherot wurden einige Schaltungen angegeben, die unter dem Namen „Kondensator-Transformatoren“ bekannt sind, und die zur Transformierung einer konstanten Spannung in einen konstanten Strom dienen. Hiermit soll in Anlagen mit in Reihe geschalteten Bogen- oder Glühlampen die Unabhängigkeit des Stromes von der Zahl der in Reihe geschalteten Lampen erreicht werden.

Bei der einen Schaltung ist parallel zu dem Lampenstromkreis, dessen Scheinwiderstand z_0 sei, nach Fig. 53 ein Kondensator und vor das Ganze eine Drosselspule geschaltet. Ist J_1 der Ladestrom des Kondensators, so ist

$$-j \frac{\mathfrak{I}_1}{\omega C} = \mathfrak{I}_0 z_0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{I}_1 = j \mathfrak{I}_0 z_0 \omega C$$

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 + \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_0 (1 + j \omega C z_0).$$

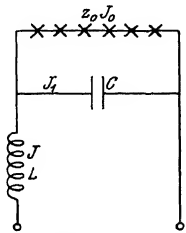


Fig. 53.

Die Klemmenspannung ist

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{I}_0 z_0 + j \mathfrak{I} \omega L = \mathfrak{I}_0 [z_0 + j \omega L (1 + j \omega C z_0)]$$

$$= \mathfrak{I}_0 [z_0 (1 - \omega^2 L C) + j \omega L].$$

Macht man

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

so wird J_0 unabhängig von z_0

$$\mathfrak{I}_0 = -j \frac{\mathfrak{P}}{\omega L}.$$

Diese Beziehung gilt offenbar nur, wenn der Kondensatorstromkreis und die Drosselspule widerstandsfrei sind.

Setzt man $\omega L = \frac{1}{\omega C} = X$, so ist der Gesamtstrom

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 \left(1 + j \frac{z_0}{X}\right),$$

und nach Einsetzen des Wertes von \mathfrak{I}_0

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{P}}{X^2} (z_0 - j X),$$

$$J = \frac{P}{X^2} \sqrt{R_0^2 + (X_0 - X)^2}.$$

Ist der Belastungsstromkreis unterbrochen, d. h. R_0 und $X_0 = \infty$, so wird $J = \infty$, beim sekundären Kurzschluß dagegen, $R_0 = X_0 = 0$,

wird $J = \frac{P}{X}$.

Bei einer zweiten Schaltung sind Kondensator und Drosselspule der Abb. 53 miteinander vertauscht, die Beziehungen sind ganz analog.

Eine weitere Schaltung ist die Brückenschaltung Fig. 54. Hier sind wegen der Symmetrie die Ströme und Spannungen der beiden Kondensatoren unter sich, und die der beiden Drosselspulen unter sich gleich. Es ist

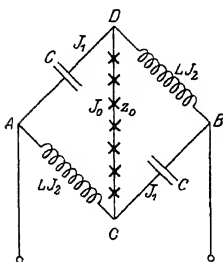


Fig. 54.

$$\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_2$$

$$\mathfrak{P} = j \mathfrak{S}_2 \omega L - j \frac{\mathfrak{S}_1}{\omega C}.$$

Eliminiert man \mathfrak{S}_1 , so wird

$$\mathfrak{P} = j \mathfrak{S}_2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + j \frac{\mathfrak{S}_0}{\omega C}.$$

Wird wieder $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ gemacht, so ist

$$\mathfrak{S}_0 = -j \mathfrak{P} \omega C = -j \frac{\mathfrak{P}}{\omega L}$$

unabhängig von der Impedanz z_0 .

Der Gesamtstrom ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = 2 \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_0.$$

Setzt man wieder $\omega L = \frac{1}{\omega C} = X$, so ist nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz für eine der Maschen ACD oder CBD

$$j \mathfrak{S}_2 X + \mathfrak{S}_0 z_0 = -j \mathfrak{S}_1 X = -j (\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_0) X$$

$$2 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_0 \left(1 + j \frac{z_0}{X} \right)$$

$$\mathfrak{S} = 2 \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_0 = j \mathfrak{S}_0 \frac{z_0}{X} = \frac{\mathfrak{P}}{X^2} z_0.$$

Auch hier wird der Primärstrom bei offenen sekundären Klemmen ($z_0 = \infty$) unendlich groß, dagegen wird er bei kurzgeschlossenen sekundären Klemmen ($z_0 = 0$) gleich Null.

Der praktischen Verwertbarkeit dieser Schaltungen für Starkströme steht die hohe Scheinleistung der Drosselspulen und Kondensatoren entgegen. So wird für die erste Schaltung das Verhältnis der Scheinleistung des Kondensators zu der des Verbrauchstromkreises

$$\frac{P_c^2 \omega C}{J_0^2 z_0} = \frac{(J_0 z_0)^2 \omega C}{J_0^2 z_0} = z_0 \omega C,$$

für die Drosselspule

$$\frac{J^2 \omega L}{J_0^2 z_0} = \frac{\omega L}{z_0} + \frac{z_0}{\omega L} - 2 \sin \varphi_0.$$

Das letzte Verhältnis wird ein Minimum für $\omega L = z_0$, und ist für $\varphi_0 = 0$ gleich 2, die Scheinleistung der Drosselspule wird zweimal so groß wie die der Belastung, die des Kondensators ebenso groß, zusammen gibt dies die dreifache Scheinleistung. Berechnet man die kleinste Summe, so erhält man für die Drosselspule

$$1,5\sqrt{2} = 2,121, \text{ für den Kondensator } \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707,$$

zusammen die 2,828fache Scheinleistung.

27. Spannungsregelung einer Leitung durch Blindstrom.

Oft wird verlangt, daß die Spannung am Ende einer Leitung unabhängig von der Belastung konstant gehalten werde, wenn die Spannung am Leitungsanfang konstant ist. Hierzu verwendet man einen leerlaufenden Synchronmotor, der am Leitungsende angeschlossen ist. Er hat die Eigenschaft, je nach der Erregung seiner Pole einen voreilenden oder nacheilenden Blindstrom aufzunehmen dessen Größe durch die Erregung einstellbar ist, die Einstellung kann selbsttätig erfolgen. Der Wirkstrom, den er zur Deckung seiner Leerlaufverluste aufnimmt, kann, weil klein, im folgenden außer Betracht bleiben (oder zum Belastungsstrom der Leitung gerechnet werden).

In dem Vektordiagramm Fig. 55 ist der Belastungsstrom J_2 am Ende der Leitung gegen die dort herrschende Spannung P_2 um φ_2 verzögert, der Blindstrom des Synchronmotors J_0 um 90° voreilend, die Summe ist der Leitungsstrom J_1 , dem der Spannungsabfall $J_1 z$ in der Leitung entspricht. Die Summe von P_2 und $J_1 z$ ist die Spannung P_1 am Leitungsanfang. Die Spannungsgleichung ist somit

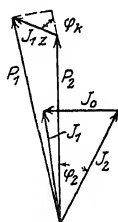


Fig. 55.

$$\mathfrak{P}_2 + (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_0)z = \mathfrak{P}_1$$

und durch Division durch z die Stromgleichung

$$\frac{\mathfrak{P}_2}{z} + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_0 = \frac{\mathfrak{P}_1}{z}.$$

$\frac{\mathfrak{P}_2}{z}$ ist der Kurzschlußstrom der Leitung bei der Spannung \mathfrak{P}_2 , ebenso

$\frac{\mathfrak{P}_1}{z}$ der Kurzschlußstrom für \mathfrak{P}_1 .

Trägt man in Fig. 56 $\frac{\mathfrak{P}_2}{z} = \overline{OA}$ um φ_k verzögert gegen \mathfrak{P}_2 auf, hieran $AB = \mathfrak{S}_2$ unter φ_2 gegen \mathfrak{P}_2 und $\mathfrak{S}_0 = \overline{BC}$ um 90° gegen \mathfrak{P}_2 voreilend, so ist $OC = \frac{\mathfrak{P}_1}{z}$. Soll \mathfrak{P}_1 und $\frac{\mathfrak{P}_1}{z}$ konstant sein, so muß bei Veränderung von \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_0 sich so ändern, daß sein Endpunkt C

auf dem Kreis mit dem Radius $\frac{P_1}{z}$ liegt. Es gibt eine Grenzbelastung, bei deren Überschreitung die gewünschte sekundäre Spannung nicht mehr erreicht wird. Die Grenze ist durch den Schnitt des Kreises mit der Ordinatenachse (P_2) gegeben. Es muß somit die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{P_2}{z} \cos \varphi_k + J_2 \cos \varphi_2 \leq \frac{P_1}{z}$$

$$\frac{P_1}{P_2} > \frac{J_2 z \cos \varphi_2}{P_2} + \cos \varphi_k. \quad \dots \quad (78)$$

Die Größe des Stromes J_0 berechnet sich aus

$$\begin{aligned} J_0 &= \overline{BC} = \overline{OE} - \overline{OG} \\ &= \frac{P_2}{z} \sin \varphi_k + J_2 \sin \varphi_2 - \sqrt{\left(\frac{P_1}{z}\right)^2 - \left(\frac{P_2}{z} \cos \varphi_k + J_2 \cos \varphi_2\right)^2}. \end{aligned} \quad (79)$$

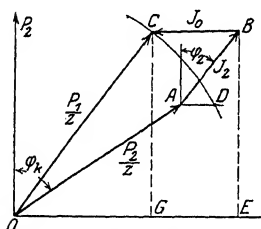


Fig. 56.

Im Grenzfall wird der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen Null.

Bei unbelastetem Netz müßte J_0 negativ (nacheilend) und gleich AD sein, seine Größe folgt aus Gl. 79 für $J_2 = 0$.

Um den Synchronmotor gut auszunutzen, wird man die Verhältnisse so wählen, daß der größte nacheilende Strom (bei Leerlauf) ebenso groß ist wie der größte voreilende Strom (bei Vollast). Dieser Fall berechnet sich wie folgt. Es ist bei Vollast

$$\left(\frac{P_1}{z}\right)^2 = \left(\frac{P_2}{z} \cos \varphi_k + J_2 \cos \varphi_2\right)^2 + \left(\frac{P_2}{z} \sin \varphi_k + J_2 \sin \varphi_2 - J_0\right)^2$$

und bei Leerlauf

$$\left(\frac{P_1}{z}\right)^2 = \left(\frac{P_2}{z} \cos \varphi_k\right)^2 + \left(\frac{P_2}{z} \sin \varphi_k + J_0\right)^2.$$

Setzt man die rechten Seiten einander gleich, so wird

$$\delta = \frac{J_0}{J_2} = \frac{\cos(\varphi_k - \varphi_2) + \frac{1}{2}\zeta}{2 \sin \varphi_k + \zeta \sin \varphi_2} \quad \dots \quad (80)$$

worin zur Abkürzung $\zeta = J_2 z_2 : P_2$ gesetzt ist.

Das Verhältnis δ der Ströme, das auch das Verhältnis der Scheinleistungen des Synchronmotors und der Belastung ist, hängt in erster Linie von φ_k und φ_2 und nur zum kleineren Teil von ζ ab.

Das Verhältnis der primären zur sekundären Spannung berechnet sich nun

28. Berechnung von Stromverteilungen durch Superposition.

Die Berechnung der Stromverteilung in Netzen mit Maschen und Knotenpunkten erfordert die Aufstellung eines Systems von so vielen linearen Gleichungen wie resultierende Scheinwiderstände zwischen je zwei Knotenpunkten vorhanden sind. Ändert sich die Belastung eines Zweiges, so ändern sich im allgemeinen die Ströme aller Zweige und der Gesamtstrom; die Rechnung wird dabei lang und unübersichtlich. Da die Gleichungen linear sind, läßt sich die Berechnung durch Anwendung des Superpositionsprinzips oft wesentlich vereinfachen. Dies sei an einem einfachen Beispiel erläutert.

Berechnung einer Brückenschaltung, Fig. 57. Sind die fünf Scheinwiderstände z_1 bis z_5 untereinander verschieden, so wären zur Ermittlung aller Zweigströme schon fünf Gleichungen, etwa zwei Maschen und drei Knotenpunktgleichungen aufzustellen. Dies vereinfacht sich mittels der Superposition wie folgt. Zunächst werde für den Strom und die Spannung jedes Zweiges eine Richtung als positiv angenommen, wie in Fig. 57 durch Pfeile angedeutet, sie ist willkürlich, ist aber für alle Rechnungen beizubehalten.

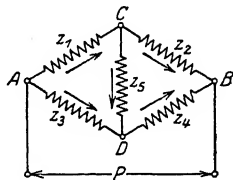


Fig. 57.

Die wirkliche Stromverteilung werde aus zwei anderen zusammengesetzt.

1. Die Querverbindung CD sei unterbrochen, also $J_5 = 0$.
2. Der noch unbekannte Strom J_5 werde über die Klemmen D und C von außen in die Brücke ein- bzw. fortgeleitet.

Damit die Superposition den wirklichen Zustand ergibt, muß die geometrische Summe der in beiden Fällen vorhandenen Spannungen an den Hauptklemmen AB die Netzspannung P ergeben und an CD die Spannung $P_5 = J_5 z_5$. Besteht im ersten Fall an AB die Netzspannung P , so muß im zweiten Fall dort die Spannung Null sein, d. h. diese Punkte sind für den zweiten Fall als widerstandslos verbunden anzusehen.

Damit ergeben sich zwei einfach zu berechnende Schaltungen. An den Klemmen CD erhält man zunächst im ersten Fall eine Spannung P_5' . Im zweiten ist eine Spannung P_5'' zuzuführen. Diese ist, wenn der Scheinwiderstand der über AB kurzgeschlossenen Brücke in bezug auf CD kurz mit z_k bezeichnet wird,

$$-P_5'' = \mathfrak{F}_5 z_k, \dots \dots \dots (81)$$

wobei das negative Zeichen daher rührt, daß P_5'' als äußere Spannung von D nach C gerichtet ist, wenn J_5 bei D in die Brücke ein- und bei C fortgeleitet wird.

Resultierend wird somit

$$\mathfrak{P}_5' + \mathfrak{P}_5'' = \mathfrak{P}_5 = \mathfrak{S}_5 \mathfrak{z}_5$$

oder nach Einsetzen des Wertes aus Gl. 81

$$\mathfrak{P}_5' = \mathfrak{S}_5 (\mathfrak{z}_5 + \mathfrak{z}_k), \quad \dots \dots \dots (82)$$

woraus hervorgeht: Man erhält den Strom J_5 , wenn man die bei offenem Zweig CD dort bestehende Spannung P_5' in diesem Zweig bei kurzgeschlossenen Hauptklemmen wirken läßt.

Es berechnet sich nun zunächst P_5' bei offenen Klemmen CD

$$\mathfrak{P}_5' = \mathfrak{P} \left[\frac{\mathfrak{z}_3}{\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4} - \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \right] \quad \dots \dots \dots (83)$$

ferner

$$\mathfrak{z}_k = \frac{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} + \frac{\mathfrak{z}_3 \mathfrak{z}_4}{\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4} \quad \dots \dots \dots (84)$$

und nach Gl. 82

$$\mathfrak{S}_5 = \frac{\mathfrak{P}_5'}{\mathfrak{z}_5 + \mathfrak{z}_k} \quad \dots \dots \dots (82a)$$

Die Teilströme \mathfrak{S}_1 bis \mathfrak{S}_4 und der Gesamtstrom \mathfrak{S} sind

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} + \mathfrak{S}_5 \frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \\ \mathfrak{S}_2 &= \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} - \mathfrak{S}_5 \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \\ \mathfrak{S}_3 &= \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4} - \mathfrak{S}_5 \frac{\mathfrak{z}_4}{\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4} \\ \mathfrak{S}_4 &= \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4} + \mathfrak{S}_5 \frac{\mathfrak{z}_3}{\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4} \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_4 = \mathfrak{P} \left[\frac{1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} + \frac{1}{\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4} \right] \\ &\quad + \mathfrak{S}_5 \left[\frac{\mathfrak{z}_3}{\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_4} - \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \right] = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}_5 \frac{\mathfrak{P}_5'}{\mathfrak{P}} \quad \dots (85) \end{aligned}$$

Wie die letzte Gleichung zeigt, ist J die geometrische Summe aus dem bei offenen Klemmen CD bestehenden Strom J' und dem mit dem (komplexen) Verhältnis $\mathfrak{P}_5' : \mathfrak{P}$ multiplizierten Strom \mathfrak{S}_5 . Es ergibt sich somit die Regel zur Berechnung der Änderung des Gesamtstromes, wenn der zuvor offene Zweig eingeschaltet wird: Die Änderung des Gesamtstromes ergibt sich durch Multiplikation des Stromes des hinzugeschalteten Zweiges mit dem Verhältnis der Spannung an den offenen Klemmen zur Netzspannung

Änderung der Belastung. Die Leistungsgleichung erhält man durch Multiplikation der Stromgleichung mit der Netzspannung P , wobei nach der Regel Kap. III S. 34 die Leistung als der reelle

Teil des Produktes aus dem Vektor der Spannung und dem zum Strom konjugierten Vektor erhalten wird.

$$[\Re \Im^k]_r = [\Re \Im'^k]_r + \left[\Re \left(\Im_5 \frac{\Re_5'}{\Re} \right)^k \right]_r$$

Der erste Ausdruck rechts ist die Leistung bei offenen Klemmen, der zweite der Leistungszuwachs. Dieser ist im allgemeinen verschieden von dem Wert $[\Re_5' \Im_5^k]_r$. Ist nämlich P_5' gegen P um einen Winkel γ phasenverschoben, J_5 gegen P_5' um φ_5' somit gegen P um $\varphi_5' + \gamma$, so ist $\Im_5 \frac{\Re_5'}{\Re}$ um γ gegen \Im_5 und um $\varphi_5' + 2\gamma$ gegen P phasenverschoben und der Leistungszuwachs wird $P_5' J_5 \cos(\varphi_5' + 2\gamma)$. Dem Produkt $[\Re_5' \Im_5^k]_r$ entspricht hingegen eine Leistung $P_5' J_5 \cos \varphi_5'$. Die beiden Ausdrücke werden in folgenden Fällen gleich:

1. Wenn alle Phasenwinkel Null, d. h. alle z Wirkwiderstände sind.

Hier gilt die Leistungssuperposition, wobei der Belastungszuwachs gleich ist dem Produkt aus dem Strom des hinzugeschalteten Zweigs und der Spannung an den offenen Klemmen. Sie trifft bei Gleichstrom stets zu.

2. Wenn $\gamma = 0$ oder 180° ist, d. h. wenn P_5' mit P gleichphasig ist.

In unserem Fall trifft dies zu für

$$z_1 z_3 = z_2 z_4 \quad \text{und} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_4 - \varphi_3.$$

Ist dabei $z_1 < z_2$, $z_4 < z_3$, so ist $\gamma = 0$, im andern Fall 180° .

3. Ist $\varphi_5' = 90^\circ$, so ist der Leistungszuwachs nur Null, wenn gleichzeitig $\gamma = 90^\circ$ oder Null ist.

In allen anderen Fällen ist der Leistungszuwachs

$$P_5' J_5 (\cos \varphi_5' \cos 2\gamma - \sin \varphi_5' \sin 2\gamma).$$

Eine Verallgemeinerung dieser Beziehungen ist in Kap. XII abgeleitet.

Siebentes Kapitel.

Mehrwellige Ströme.

29. Darstellung durch Fouriersche Reihen. — 30. Ermittlung der Amplituden der Fourierschen Reihe. — 31. Besondere Kurvenformen. — 32. Arithmetische Analyse. — 33. Graphische Verfahren. — 34. Effektivwert und Leistung mehrwelliger Ströme. — 35. Formfaktor und Scheitelfaktor mehrwelliger Ströme. — 36. Die Summe von zwei mehrwelligen Strömen. — 37. Stromverzerrung durch Kapazität und Selbstinduktion. — 38. Graphische Darstellung von mehrwelligen Strömen.

29. Darstellung durch Fouriersche Reihen.

Die in der Technik verwendeten Wechselströme weichen im allgemeinen mehr oder weniger von der Sinusform ab. Wir erweitern daher unsere Betrachtung auf periodische Ströme, deren zeitlicher Verlauf eine beliebige Kurvenform hat.

Die rechnerische Behandlung solcher Ströme beruht auf der Reihenentwicklung nach Fourier.

Danach kann eine beliebige einfach periodische Funktion dargestellt werden durch eine Reihe von Sinusfunktionen, deren Periodenzahlen sich wie ganze Zahlen verhalten; die Zahl der Glieder der Reihe kann endlich oder unendlich groß sein.

Dies bedeutet, daß man sich einen beliebigen periodischen Strom zusammengesetzt denken kann aus einer sinusförmigen Grundwelle von derselben Frequenz wie der periodische Strom, und einer endlichen oder unendlichen Zahl von darüber gelagerten sinusförmigen Oberwellen, deren Frequenzen 2, 3, 4, ... mal so groß sind wie die der Grundwelle.

Aus diesem Grunde nennt man Wechselströme von beliebiger Kurvenform mehrwellige Wechselströme.

Die Gleichung einer Oberwelle ist

$$i_n = i_{nm} \sin(\kappa \omega t + \psi_n) \quad \dots \dots \dots (86)$$

Hierin ist κ eine beliebige ganze Zahl, ω die Kreisfrequenz der Grundwelle, $\kappa \omega$ die Kreisfrequenz der betrachteten Oberwelle von

Die Gleichung der aus unendlich vielen Wellen zusammengesetzten periodischen Stromwelle ist daher

$$i = \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} i_{\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} i_{\kappa m} \sin(\kappa \omega t + \psi_{\kappa}), \quad (87)$$

worin für κ der Reihe nach alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ einzusetzen sind. Dies ist die allgemeinste Form einer Fourierschen Reihe.

Entwickelt man in Gl. 86

$$i_{\kappa m} \sin(\kappa \omega t + \psi_{\kappa}) = i_{\kappa m} \cos \psi_{\kappa} \sin \kappa \omega t + i_{\kappa m} \sin \psi_{\kappa} \cos \kappa \omega t$$

und setzt

$$i_{\kappa m} \cos \psi_{\kappa} = a_{\kappa}, \quad i_{\kappa m} \sin \psi_{\kappa} = b_{\kappa} \quad (88)$$

so wird

$$i_{\kappa} = a_{\kappa} \sin \kappa \omega t + b_{\kappa} \cos \kappa \omega t \quad (86a)$$

Hier ist jede Oberwelle in zwei um eine Viertelperiode gegeneinander phasenverschobene Wellen von gleicher Frequenz mit den Amplituden a_{κ} und b_{κ} zerlegt. Es ist

$$i_{\kappa m} = \sqrt{a_{\kappa}^2 + b_{\kappa}^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_{\kappa} = \frac{b_{\kappa}}{a_{\kappa}} \quad (89)$$

Für $\kappa = 0$ ergibt Gl. 86a

$$i_0 = b_0,$$

also einen Gleichstrom, alle anderen Werte von κ ergeben dagegen Wechselströme.

Hiermit kann die Gleichung eines beliebig periodischen Stromes geschrieben werden

$$i = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\infty} a_{\kappa} \sin \kappa \omega t + b_0 + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\infty} b_{\kappa} \cos \kappa \omega t \quad . . . (87b)$$

Ein mehrwelliger Strom kann also aus einem Gleichstrom und einer Reihe von Sinusströmen verschiedener Frequenzen zusammengesetzt sein.

Die Möglichkeit des Vorhandenseins eines Gleichstromes führt uns dazu, von den periodischen Strömen noch die reinen Wechselströme zu unterscheiden.

Bei einem einwelligen Strom ist nach Kap. I der Mittelwert während einer ganzen Periode gleich Null, d. h. es wird in einer halben Periode durch den Leiter eine ebenso große Elektrizitätsmenge in der einen Richtung bewegt wie während der folgenden Halbperiode in der anderen Richtung. Da alle Oberwellen wieder Sinusform haben, gilt dies auch für sie.

Für einen periodischen Strom, der aus einer Grundwelle und einer Anzahl Oberwellen besteht, ist daher das Integral

$$a = \int_0^T i \, dt$$

für eine ganze Periode gleich Null. Die von der Stromkurve mit der Abszissenachse gebildeten positiven und negativen Flächenstücke sind gleichgroß (s. Fig. 59 bis 61). Einen solchen Strom bezeichnet man als reinen Wechselstrom.

Sind dagegen die positiven und negativen Flächenstücke nicht gleichgroß, wie in Fig. 58, so bedeutet dies, daß die in einer Richtung bewegte Elektrizitätsmenge größer ist als die in der

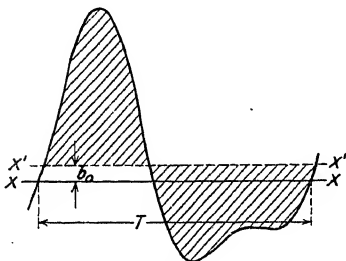


Fig. 58.

anderen. Dies wird durch das Vorhandensein eines Gleichstromes in der Stromwelle bedingt. Er ist in der Gl. 87b durch das Glied b_0 dargestellt, und die in einer Periode bewegte Elektrizitätsmenge ist $q_0 = b_0$.

Verschiebt man in Fig. 58 die Abszissenachse $X-X'$ parallel zu sich selbst, bis die von der neuen Achse $X'-X'$ und der Stromkurve begrenzten positiven und negativen Flächenstücke gleichgroß sind, ist der Abstand der neuen Achse von der alten gleich b_0 .

Das Fehlen dieses Gliedes kennzeichnet einen reinen Wechselstrom.

Die durch Induktion in rotierenden Maschinen und in Transformatorern erzeugten Wechselströme sind reine Wechselströme. Der Induktionsfluß Ψ durch eine Spule ist eine periodische Funktion der Zeit, er ist zur Zeit $(t+T)$ ebenso groß wie zur Zeit t .

Die in einer Windung induzierte EMK ist

$$e = - \frac{d\Psi}{dt},$$

daher

$$- \int_0^T e \, dt = \Psi_{(T)} - \Psi_{(0)} = 0.$$

30. Ermittlung der Amplituden der Fourierschen Reihe.

Es soll nun gezeigt werden, wie für eine beliebige periodische Funktion die Koeffizienten a_n , b_0 und b_n der Reihe Gl. 87b ermittelt werden können, wenn das graphische Bild der Funktion gegeben ist.

Zur Abkürzung bezeichnen wir die Abszissen mit x anstatt mit ωt , die Ordinaten mit y . Die Länge der Welle auf der Abszissenachse ist dann 2π . Bezeichnet nun κ die besondere Welle, der Koeffizienten gesucht sind, und λ die beliebigen Werte von κ , multipliziere man alle Ordinaten y mit dem zugehörigen $\sin \kappa x$ und bilde den Mittelwert über eine Periode. Dieser ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \sin \kappa x \, dx.$$

Da hierin

$$y = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} a_{\lambda} \sin \lambda x + b_0 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} b_{\lambda} \cos \lambda x,$$

erhält man eine Reihe von Produkten von den drei Formen:

$$\begin{aligned} 1. & \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{\lambda} \sin \lambda x \sin \kappa x dx \\ 2. & \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_0 \sin \kappa x dx \\ 3. & \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_{\lambda} \cos \lambda x \sin \kappa x dx. \end{aligned}$$

Von diesen Integralen werden alle Null, bis auf jenes der ersten Form, bei dem $\lambda = \kappa$ ist. Dieses wird

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{\kappa} \sin^2 \kappa x dx = \frac{a_{\kappa}}{2}.$$

Es ist daher

$$a_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin \kappa x dx \quad (90)$$

Multipliziert man zweitens alle Ordinaten y mit $\cos \kappa x$ und bildet den Mittelwert über eine ganze Periode, so wird ganz analog

$$b_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos \kappa x dx \quad (91)$$

Endlich ist der Mittelwert der Ordinaten y während der ganzen Periode

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx \quad (92)$$

31. Besondere Kurvenformen.

1. Bei den meisten in der Technik vorkommenden Wechselströmen ist die negative Halbwelle das Spiegelbild der positiven Halbwelle in bezug auf die Abszissenachse. Es sind also jeweils zwei Momentanwerte im Abstände einer halben Periode entgegengesetzt gleich (s. Fig. 59) d. h.

Bei einer solchen Kurve fällt das Glied b_0 fort, die Ordinate die zur Abszisse x gehört, hat nach Gl. 87a den Wert

$$y_x = \Sigma a_n \sin nx + \Sigma b_n \cos nx,$$

und zur Abszisse $x + \pi$ gehört die Ordinate

$$y_{(x+\pi)} = \Sigma a_n \sin n(x+\pi) + \Sigma b_n \cos n(x+\pi).$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sin n(x+\pi) &= \sin(nx + n\pi) = (-1)^n \sin nx \\ \cos n(x+\pi) &= \cos(nx + n\pi) = (-1)^n \cos nx. \end{aligned}$$

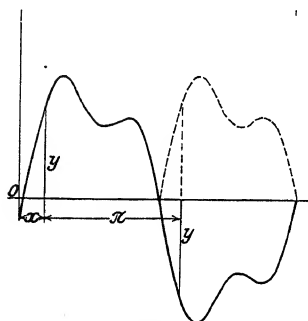


Fig. 59.

Die Bedingung 93 wird also nur erfüllt, wenn n eine ungerade Zahl ist, es folgt:

Eine periodische Kurve, die die negative Halbwelle das Spiegelbild der positiven in bezug auf die Abszissenachse ist, enthält nur ungeradzahlige Oberwellen.

Berechnet man für eine solche Kurve die Koeffizienten a_n und b_n nach Gl. 90 und 91, so ist bei Bildung

$$y_{(x+\pi)} \sin n(x+\pi) = y_x \sin nx,$$

$$y_{(x+\pi)} \cos n(x+\pi) = y_x \cos nx.$$

Hieraus folgt, daß die Integrale für die positiven und negativen Halbwellen denselben Wert haben. Man braucht daher das Integral nur über eine halbe Periode zu erstrecken und erhält

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y \sin nx \, dx \quad \dots \dots \dots (90)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y \cos nx \, dx \quad \dots \dots \dots (91)$$

2. Ist eine Kurve in bezug auf den Ursprung symmetrisch (s. Fig. 60), so ist

$$y_{(-x)} = -y_x$$

und

$$y_{(2\pi-x)} = -y_x \quad \dots \dots \dots (92)$$

Da

$$y_{(2\pi-x)} = \Sigma a_n \sin n(2\pi-x) + \Sigma b_n \cos n(2\pi-x)$$

und

$$\sin n(2\pi-x) = \sin(2\pi n - nx) = -\sin nx$$

$$\cos n(2\pi-x) = \cos(2\pi n - nx) = +\cos nx,$$

folgt, daß die Bedingung 94 nur von den Sinusgliedern erfüllt

3. Ist bei einer Kurve einerseits die negative Halbwelle das Spiegelbild der positiven in bezug auf die Abszissenachse und ist sie andererseits in bezug auf den Ursprung symmetrisch (s. Fig. 61), so erhält sie nach vorstehendem nur ungerade Sinusglieder. Hier ist

$$y_{(\pi-x)} = y_x.$$

Für ungerade Werte von κ , die hier nur in Frage kommen, ist
und daher

$$y_{(\pi-x)} \sin \kappa(\pi-x) = y_x \sin \kappa x.$$

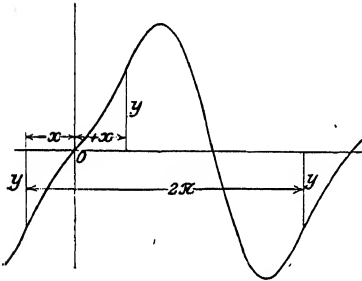


Fig. 60.

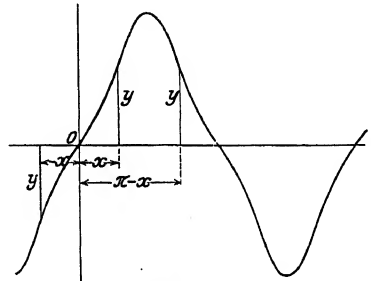


Fig. 61.

Hieraus folgt, daß das Integral Gl. 90a in den beiden Hälften der Halbwelle von 0 bis $\pi/2$ und von $\pi/2$ bis π den gleichen Wert hat. Man braucht also nur von 0 bis $\pi/2$ zu integrieren und erhält

$$a_{\kappa} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y \sin \kappa x dx \quad \dots \dots \dots (90b)$$

Beispiele. 1. Die rechteckige Stromkurve (Fig. 62), die durch Kommutierung eines Gleichstromes erhalten wird, entspricht dem dritten der soeben besprochenen Fälle. Sie hat daher nur ungerade Sinusglieder und es kann Gl. 90b verwendet werden.

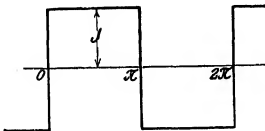


Fig. 62.

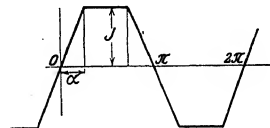


Fig. 63.

Die Ordinate y hat den konstanten Wert J , daher ist

$$a_{\kappa} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} J \sin \kappa x dx = -\frac{4J}{\pi \kappa} \cos \kappa x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4J}{\pi \kappa}.$$

Durch Einsetzen der ungeraden Zahlen für κ erhält man so mit die Gleichung der rechteckigen Stromkurve

$$y = \frac{4}{\pi} J \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right) \quad (95)$$

Die Amplituden der Oberwellen sind ihrer Periodenzahl umgekehrt proportional.

2. Die Trapezkurve (Fig. 63). Sie ist von Wichtigkeit für die Feldform von Wechselstrommaschinen. Auch hier kann Gl. 90b verwendet werden. Hier ist

$$y = J \frac{x}{\alpha} \text{ von } x=0 \text{ bis } x=\alpha$$

$$y = J \text{ von } x=\alpha \text{ bis } x=\frac{\pi}{2}.$$

Daher

$$a_{\kappa} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J \sin \kappa x dx = \frac{4}{\pi} J \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} x \sin \kappa x dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin \kappa x dx \right).$$

Das erste Integral ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} x \sin \kappa x dx &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\sin \kappa x}{\kappa^2} - \frac{x \cos \kappa x}{\kappa} \right]_{x=0}^{x=\alpha} \\ &= \frac{\sin \kappa \alpha}{\alpha \kappa^2} - \frac{\cos \kappa \alpha}{\kappa}, \end{aligned}$$

das zweite Integral ist

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin \kappa x dx = \frac{\cos \kappa \alpha}{\kappa}.$$

Daher wird

$$a_{\kappa} = \frac{4J}{\pi \alpha \kappa^2} \sin \kappa \alpha,$$

und durch Einsetzen der ungeraden Zahlen für κ erhält man die Gleichung der Trapezkurve

$$y = \frac{4J}{\pi \alpha} \left[\sin \alpha \sin x + \frac{1}{9} \sin 3 \alpha \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5 \alpha \sin 5x + \dots \right] \quad (96)$$

Besondere Fälle des Trapezes.

a) Für das Dreieck ist $\alpha = \pi/2$ und $\sin \kappa \alpha = \pm 1$, wobei das + oder - Zeichen gilt, je nachdem $\kappa = 4n \pm 1$ ist, worin n eine ganze Zahl oder 0 bedeutet. Daher ist

$$y = \frac{8}{\pi^2} J \left[\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots \right] \quad (97)$$

b) Für das Rechteck ist $\alpha = 0$. Der Grenzwert $\frac{\sin \kappa \alpha}{\kappa \alpha}$ nähert

sich für $\alpha=0$ dem Wert 1, daher ist, wie schon zuvor gefunden,

$$a_n = \frac{4J}{\pi n} \quad (\text{s. Gl. 95}).$$

c) Ist $n\alpha = \pi$ oder ein Vielfaches davon, so wird $\sin n\alpha = 0$. Die Oberwelle der Ordnung $n = \pi/\alpha$ und die Vielfachen fallen fort. Da nun nach Gl. 96 bei dem Trapez die Amplituden der Oberwellen umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Periodenzahl sind, ist nächst der Grundwelle die dritte Oberwelle am größten. Das Trapez nähert sich also am meisten der Sinusform, wenn die dritte Oberwelle fortfällt, hierzu muß somit $\alpha = \pi/3$ sein. In dieser Kurve sind dann nur noch Oberwellen der Ordnung $n = (6n \pm 1)$ enthalten, und da

$$\sin n\alpha = \sin(6n \pm 1) \frac{\pi}{3} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

wird für das Trapez mit $\alpha = \pi/3$

$$y = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} J \left(\sin x - \frac{1}{25} \sin 5x + \frac{1}{49} \sin 7x - \dots \right).$$

Diese Betrachtung gibt den Grund an, weshalb zur Erzielung einer möglichst sinusförmigen Feldverteilung bei vielen Wechselstrommaschinen nur $2/3$ des Polbogens bewickelt werden.

3. Die Kurve des kommutierten Sinusstromes (Fig. 64). Bei dieser Kurve ist

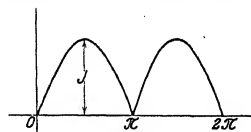


Fig. 64.

$$y(-x) = y(+x),$$

woraus folgt, daß hier nur die Kosinusglieder vorhanden sind; außerdem enthält sie einen Gleichstrom.

Setzen wir in Gl. 91

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos nx \, dx$$

$$y = J \sin x \quad \text{von } x = 0 \text{ bis } x = \pi$$

und

$$y = -J \sin x \quad \text{von } x = \pi \text{ bis } x = 2\pi,$$

so ist

$$b_n = \frac{J}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cos nx \, dx \right]$$

$$= \frac{J}{2\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] \, dx$$

$$- \frac{J}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] \, dx$$

$$= \frac{J}{2\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right]$$

Dieser Ausdruck wird Null, wenn κ ungerade ist; es bleibt nur die geradzahlgigen Oberwellen. Ist κ gerade, so wird

$$b_{\kappa} = \frac{2J}{x} \left[\frac{1}{\kappa + 1} - \frac{1}{\kappa - 1} \right] = -\frac{4J}{\pi(\kappa^2 - 1)}.$$

Nach Gl. 92 wird ferner

$$b_0 = \frac{J}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2J}{\pi}.$$

Daher die Gleichung des kommutierten Sinusstromes

$$y = \frac{2J}{\pi} \left[1 - \frac{2 \cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cos 6x}{5 \cdot 7} - \dots \right]. \quad (98)$$

32. Arithmetische Analyse.

Die technisch vorkommenden Wechselstromkurven lassen sich nicht in so einfacher Weise in ihre Teilwellen zerlegen, wie die behandelten Beispiele. Um eine mehrwellige Stromkurve zu analysieren, verwendet man ein angenähertes Verfahren, indem man die Integration ersetzt durch eine Summation einer endlichen Zahl von Ordinaten, die in einem endlichen Abstand voneinander liegen.

Die dadurch erhaltene Annäherung an die wirkliche Fouriersche Reihe wird im allgemeinen um so größer, je mehr Ordinaten verwendet werden. Da die Verwendung einer großen Anzahl von Punkten aber sehr umständlich ist, beschränkt man sich auf kleinere Zahlen, und es soll zuerst untersucht werden, in welcher Weise die Zahl der Ordinaten das Verhältnis der aus der Rechnung erhaltenen Amplituden zu den wirklichen bestimmt. Dies läßt sich leicht ermitteln, wenn man, wie es gewöhnlich der Fall ist, die Ordinaten in gleichem Abstand voneinander wählt¹⁾.

Teilt man vom Koordinatenanfangspunkt an die ganze Periode (2π) in n gleiche Teile, zu denen die Ordinaten y_1, y_2, \dots, y_n in Abstände $\frac{2\pi}{n}$ gehören, wobei die Ordinate y_r zur Abszisse $x = r \frac{2\pi}{n}$ gehört, so treten an die Stelle der Integrale Gl. 90 und 91

$$a_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_1^{2\pi} y \sin \kappa x \, dx, \quad b_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos \kappa x \, dx$$

zwei Summen von je n Gliedern, deren jedes aus dem Produkt der Ordinate y und dem zugehörigen $\sin \kappa x$ bzw. $\cos \kappa x$ besteht. Dem Abstände dx entspricht die Strecke $\frac{2\pi}{n}$. Die Grenzen sind

$x = \frac{2\pi}{n}$ und $x = 2\pi$. Bezeichnen wir die mit n Teilpunkten ermittelten Koeffizienten mit $a_{\kappa(n)}$ bzw. $b_{\kappa(n)}$, zum Unterschied von den Koeffizienten a_{κ} und b_{κ} der wirklichen Reihe, so ist

$$a_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum_{x=\frac{2\pi}{n}}^{x=2\pi} y \sin \kappa x \quad (99)$$

$$b_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum_{x=\frac{2\pi}{n}}^{x=2\pi} y \cos \kappa x \quad (100)$$

Bezeichnet nun wieder κ die Oberwelle, deren Amplitude gesucht ist, λ die beliebigen Werte κ , so ist die Gleichung der Kurve, s. Gl. 87b,

$$y = \sum_1^{\infty} a_{\lambda} \sin \lambda x + \sum_1^{\infty} b_{\lambda} \cos \lambda x \quad (101)$$

wobei b_0 fortgelassen, d. h. ein reiner Wechselstrom zugrunde gelegt ist.

Setzt man diesen Wert von y in Gl. 99 und 100 ein, so erhält man für jeden Wert von λ in jeder der beiden Gleichungen zwei Reihen von je n Gliedern, die in Gl. 99 Produkte der Form enthalten

$$\left. \begin{array}{l} \sin \lambda x \sin \kappa x, \quad \cos \lambda x \sin \kappa x \\ \sin \lambda x \cos \kappa x, \quad \cos \lambda x \cos \kappa x \end{array} \right\} (102)$$

Diese können der Reihe nach ersetzt werden durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cos (\lambda - \kappa) x - \frac{1}{2} \cos (\lambda + \kappa) x \\ & - \frac{1}{2} \sin (\lambda - \kappa) x + \frac{1}{2} \sin (\lambda + \kappa) x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sin (\lambda - \kappa) x + \frac{1}{2} \sin (\lambda + \kappa) x \\ & \frac{1}{2} \cos (\lambda - \kappa) x + \frac{1}{2} \cos (\lambda + \kappa) x. \end{aligned}$$

Für jeden Wert von λ enthält nun jede der Gl. 99 und 100 vier Reihen von je n Gliedern der zuletzt genannten Formen. Diese Glieder stellen n Ordinaten einer Sinuskurve dar, die in gleichem Abstand voneinander auf $(\lambda \pm \kappa)$ ganze Sinuswellen verteilt liegen. Ihre Summe ist für die Sinusfunktion stets Null, für die Kosinusfunktionen wird sie im allgemeinen Null, außer bei gewissen Werten von $(\lambda \pm \kappa)$. Ist nämlich $(\lambda \pm \kappa) = 0$, so wird

$$\cos (\lambda \pm \kappa) x = \cos 0 = 1,$$

Ist ferner $(\lambda \pm \kappa)$ ein Vielfaches (z) der Teilungszahl n , so ist, da

$$x = \nu \frac{2\pi}{n},$$

Da hierin ν und z ganze Zahlen sind, hat jedes Kosinusglied den Wert 1.

Für $(\lambda \pm \kappa) = 0, n, 2n, 3n$ usf. wird also jedes Kosinusglied 1, und die mit $\frac{1}{2}$ multiplizierte Summe der n Glieder ist $n/2$.

Hiermit erhält man die Amplituden $a_{\kappa(n)}$ und $b_{\kappa(n)}$ nach Gl. 99 und 100

$$a_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum y \sin \kappa x = a_{\kappa} - a_{n-\kappa} + a_{n+\kappa} - a_{2n-\kappa} + a_{2n+\kappa} - \dots \quad (103)$$

$$b_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum y \cos \kappa x = b_{\kappa} + b_{n-\kappa} + b_{n+\kappa} + b_{2n-\kappa} + b_{2n+\kappa} + \dots \quad (104)$$

Man sieht, daß jede bei der Analyse erhaltene Amplitude Oberwellen enthält, deren Ordnung um so höher ist, je größer die Zahl der Teilpunkte n ist.

Bestimmt man z. B. die Grundwelle mit $n=18$ Teilpunkten, so sind in dem Resultat auch noch die 17. und 19., die 37. und 35. usf. Oberwelle enthalten. Die Bestimmung der 7. Oberwelle enthält auch die 11. und 25. usw.

Bei symmetrischen Kurven, die nach S. 76 nur ungerade Oberwellen enthalten, genügt die Summation über eine Halbwelle. Ist jetzt n die Zahl der Teilpunkte der Halbwelle, so ist

$$a_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum_{x=\frac{\pi}{n}}^{x=\pi} y \sin \kappa x \quad \dots \quad (99a)$$

$$b_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum_{x=\frac{\pi}{n}}^{x=\pi} y \cos \kappa x \quad \dots \quad (100a)$$

Jede Summe hat n Glieder. Für y ist wieder der Wert Gl. 101 einzusetzen. $(\lambda \pm \kappa)$ sind jetzt stets gerade Zahlen. Die Sinusreihen fallen wieder fort. Die Kosinusreihen haben jetzt, abgesehen vom Vorzeichen, die Form

$$\frac{1}{2} \left[\cos(\lambda \mp \kappa) \frac{\pi}{n} + \dots + \cos(\lambda \mp \kappa) \pi \right].$$

Diese Reihe ist Null, außer wenn

$$\frac{\lambda \mp \kappa}{2} = 0, n, 2n, 3n, \dots$$

ist. In diesen Fällen ist die Summe wieder $\frac{n}{2}$, so daß nun

$$a_{\kappa(n)} = a_{\kappa} - a_{2n-\kappa} + a_{2n+\kappa} - a_{4n-\kappa} + a_{4n+\kappa} - \dots + \quad (103a)$$

$$b_{\kappa(n)} = b_{\kappa} + b_{2n-\kappa} + b_{2n+\kappa} + b_{4n-\kappa} + b_{4n+\kappa} + \dots + \quad (104a)$$

Ausführung der Analyse.

Wir betrachten den für die Technik wichtigsten Fall, daß nur ungerade harmonische vorhanden sind. n sei wieder die Zahl der Teilpunkte der Halbwelle. In den Summen, die nach Gl. 99 a und 100 a zu verwenden sind,

$$a_x = \frac{2}{n} \sum_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} y \sin \kappa x, \quad b_x = \frac{2}{n} \sum_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} y \cos \kappa x$$

lassen sich nach Runge¹⁾ jeweils zwei Glieder zusammenfassen. Solche Glieder liegen in gleichem Abstand von der Mitte der Halbwelle $(x = \frac{\pi}{2})$. Hat der eine die Abszisse $x = \nu \frac{\pi}{n}$, so ist die des zweiten $(n - \nu) \frac{\pi}{n}$, die Summe der Abszissen ist also gleich der Halbwelle. Nun ist

$$\sin \kappa (n - \nu) \frac{\pi}{n} = \sin \kappa \left(\pi - \nu \frac{\pi}{n} \right) = \sin \kappa \nu \frac{\pi}{n},$$

$$\cos \kappa (n - \nu) \frac{\pi}{n} = \cos \kappa \left(\pi - \nu \frac{\pi}{n} \right) = -\cos \kappa \nu \frac{\pi}{n}.$$

Die Ordinaten solcher Punkte sind also mit den gleichen Sinus und mit den entgegengesetzten Kosinus zu multiplizieren.

Bei der Multiplikation mit $\sin \kappa x$ hat man daher die Summe, bei der Multiplikation mit $\cos \kappa x$ die Differenz der beiden Ordinaten zu nehmen.

Man faltet nun zweckmäßig die Reihe der Ordinaten in zwei, so daß die mit demselben Faktor zu multiplizierenden Ordinaten übereinanderstehen, wie in dem nachstehenden Schema für $n = 12$ Teilpunkte und den Abstand $\pi/n = 15^\circ$ angegeben ist. Man merkt sich dieses Schema am einfachsten dadurch, daß die Summe der Indizes der übereinanderstehenden Ordinaten die Zahl n (hier 12) ergibt. Das mittlere und das n te Glied bleiben für sich. Dann bildet man die Summen s und die Differenzen d .

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Summen:		s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Differenzen:	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	

Hierin ist

$$s_1 = y_1 + y_{11}, \quad d_1 = y_5 - y_7$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$s_6 = y_6, \quad d_6 = -y_{12}.$$

Es wird nun

$$a_{\kappa} = \frac{1}{6} [s_1 \sin 15\kappa + s_3 \sin 30\kappa + \dots + s_5 \sin 75\kappa + s_6 \sin 90\kappa]$$

$$b_{\kappa} = \frac{1}{6} [d_6 + d_5 \cos 15\kappa + d_4 \cos 30\kappa + \dots + d_1 \cos 75\kappa].$$

Da die ungeraden Vielfachen der hier vorkommenden Winkel bis auf das Vorzeichen stets wieder dieselben Winkelfunktionen ergeben, hat man somit nur 5 Faktoren und den Faktor 1. Bei gewissen Oberwellen, nämlich wenn κ durch 3 teilbar ist, kommen nur die Faktoren 0,7071 und 1 vor.

In der nachstehenden Tabelle sind in der ersten Vertikalreihe die Winkelfunktionen angegeben, in den folgenden die mit ihnen zu multiplizierenden Ordinatensummen unter Berücksichtigung des Vorzeichens, und zwar beziehen sich die 6 Vertikalreihen der Reihe nach auf die Amplituden a_1 bis a_{11} . Man multipliziert also nacheinander die in einer Vertikalreihe stehenden Summen s mit den neben ihnen stehenden Faktoren, die Summe dieser Produkte ist dann das sechsfache der Amplitude a_{κ} . Zur Ermittlung der Amplituden b_{κ} sind in dem Schema an Stelle der Summen s die Differenzen d zu setzen, wobei sich das Vorzeichen von b_{κ} wie dort angegeben ergibt.

0,2588	s_1		s_5	s_5		s_1
0,5000	s_2		s_2	$-s_2$		$-s_2$
0,7071	s_3	$s_1 + s_3 - s_5$	$-s_3$	$-s_3$	$s_1 + s_3 - s_5$	s_3
0,8660	s_4		$-s_4$	s_4		$-s_4$
0,9659	s_5		s_1	s_1		s_5
1,0000	s_6	$s_2 - s_6$	s_6	$-s_6$	$-(s_2 - s_6)$	$-s_6$
	$6 a_1$	$6 a_3$	$6 a_5$	$6 a_7$	$6 a_9$	$6 a_{11}$
	$6 b_1$	$-6 b_3$	$6 b_5$	$-6 b_7$	$6 b_9$	$-6 b_{11}$

Eine weitere Vereinfachung des Rechenverfahrens hat Schleiermacher¹⁾ angegeben, die darauf beruht, daß in den berechneten Amplituden a_{κ} und b_{κ} je nach der Zahl der Teilpunkte n nach Gl. 103a und 104a auch die Amplituden von Wellen höherer Ordnung enthalten sind. Nimmt man wieder 12 Teilpunkte für die Halbwelle an, so hat man für den Koeffizienten a_1 der Grundwelle zunächst den Wert $a_{1(12)}$ für 12 Teilpunkte, gleichzeitig aber auch die Werte $a_{1(6)}$, $a_{1(4)}$, $a_{1(3)}$, $a_{1(2)}$ für 6, 4, 3, 2 Teilpunkte durch Fortlassen der Zwischenpunkte. Sollen z. B. wieder die ersten 6 Koeffizienten a_1 bis a_{11} und b_1 bis b_{11} bestimmt werden, wobei die Oberwellen von der 13. an vernachlässigt werden, so erhält man für die verschiedenen Einteilungen nach Gl. 103a

$$a_{1(12)} = a_1 [-a_{23} + a_{25} - \dots]$$

$$a_{1(6)} = a_1 - a_{11} [+a_{13} - \dots]$$

¹⁾ ETZ 1910, Heft 49.

$$\begin{aligned}
 a_{1(4)} &= a_1 - a_7 + a_9 [-a_{15} + \dots \\
 a_{1(3)} &= a_1 - a_5 + a_7 - a_{11} [+a_{13} - \dots \\
 a_{1(2)} &= a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - a_{11} [+a_{13} \dots \\
 \text{und } a_{3(12)} &= a_3 [-a_{21} + a_{27} - \dots
 \end{aligned}$$

wobei die jeweils hinter der eckigen Klammer stehenden Oberwellen vernachlässigt werden.

Bildet man nun:

$$\begin{aligned}
 a_{1(12)} - a_{1(6)} &= e_6 = a_{11} \\
 a_{1(12)} - a_{1(4)} &= e_4 = a_7 - a_9 \\
 a_{1(12)} - a_{1(3)} &= e_3 = a_5 - a_7 + a_{11} \\
 a_{1(12)} - a_{1(2)} &= e_2 = a_3 - a_5 + a_7 - a_9 + a_{11},
 \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_{1(12)} \\
 a_3 &= a_{3(12)} \\
 a_5 &= a_3 - e_2 + e_4 + e_6 \\
 a_7 &= a_5 - e_3 + e_6 \\
 a_9 &= a_7 - e_4 \\
 a_{11} &= e_6.
 \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten b_{κ} hat man analog:

$$\begin{aligned}
 b_{1(12)} - b_{1(6)} &= f_6 = -b_{11} \\
 b_{1(12)} - b_{1(4)} &= f_4 = -(b_7 + b_9) \\
 b_{1(12)} - b_{1(3)} &= f_3 = -(b_5 + b_7 + b_{11}) \\
 b_{1(12)} - b_{1(2)} &= f_2 = -(b_3 + b_5 + b_7 + b_9 + b_{11}),
 \end{aligned}$$

worin $b_{1(2)}$ die Ordinate für den Anfangspunkt der Teilung mit 2 Teilpunkten ist. Hieraus wird dann

$$\begin{aligned}
 b_1 &= b_{1(12)} \\
 b_3 &= b_{3(12)} \\
 b_5 &= -b_3 - f_2 + f_4 + f_6 \\
 b_7 &= -b_5 - f_3 + f_6 \\
 b_9 &= -b_7 - f_4 \\
 b_{11} &= -f_6.
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Koeffizienten $a_{1(12)}$ bis $a_{1(2)}$ und $a_{3(12)}$ verwendet man die nachstehende Tabelle, in der s_1 bis s_6 wieder die aus der Zusammenfaltung der Reihe gewonnenen Summen sind. Für die entsprechenden Koeffizienten $b_{\kappa(n)}$ sind dann wieder unter Berücksichtigung des Vorzeichens an Stelle der Summen s die Differenzen d zu setzen.

0,2588	s_1					
0,5000	s_2	s_2				
0,7071	s_3		s_3			$s_1 + s_3 - s_5$
0,8660	s_4	s_4		s_4		
0,9659	s_5					
1,0000	s_6	s_6	s_6		s_6	$s_2 - s_6$

Dieses Verfahren hat den Vorzug, daß, wo es zunächst nur auf die Grundwelle ankommt, mit einer größeren Teilung, z. B. $n=6$ begonnen werden kann. Hierbei erhält man für die Grundwelle schon je vier Werte $a_{1(2)}$, $a_{1(3)}$, $a_{1(4)}$, $a_{1(6)}$ und entsprechend die $b_{1(n)}$. Man kann nun durch Vergleich dieser Werte schon beurteilen, ob noch höhere Harmonische vorhanden sind, und dann zu deren Ermittlung die Zwischenpunkte für $n=12$ hinzunehmen. Auch lassen sich leicht durch weiteres Hinzufügen von Teilpunkten noch höhere Harmonische ermitteln.

33. Graphische Verfahren.

Ein sehr einfach auszuführendes und praktisch wichtiges Verfahren rührt von Fischer Hinnen her (ETZ 1901, S. 396). Es beruht auf dem, schon auf S. 81 verwendeten Satz: Teilt man auf der Abszissenachse die Länge von w ganzen Wellen einer Sinuslinie in p gleiche Teile und zeichnet die Ordinaten (s. Fig. 65), so ist, wenn $w:p$ keine ganze Zahl ist, die Summe der Ordinaten gleich Null. In der Figur ist $w=3$, $p=5$.

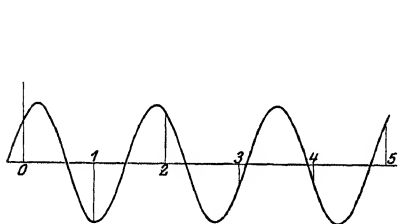


Fig. 65.

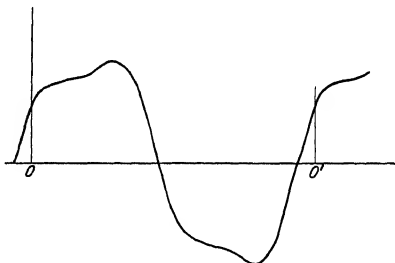


Fig. 66.

Ist dagegen $w:p$ eine ganze Zahl, so sind alle Ordinaten gleich groß, ihre Summe ist daher p mal so groß wie die Anfangsordinate.

Ist eine Kurve gegeben, so teile man vom Koordinatenanfangspunkt O aus eine ganze Periode OO' ab (s. Fig. 66). Der Anfangsordinate entspricht $x=0$, sie enthält nach Gl. 101 alle Amplituden b_n .

$$y_{(1)} = b_1 + b_3 + b_5 + \dots$$

Teilt man nun die Periode OO' in 3 Teile und addiert die 3 Ordinaten, so enthält diese Summe nach vorstehendem nur die Amplituden b_n der Oberwellen, deren Ordnung ein Vielfaches von 3 ist. Für jede dieser Oberwellen enthält die Summe den dreifachen Betrag der Anfangsordinate. Daher ist die Summe der 3 Ordinaten

$$\Sigma y_{(3)} = 3(b_3 + b_9 + b_{15} + \dots).$$

Ebenso ergeben sich für 5, 7, ... Teile die Ordinatensummen:

$$\Sigma y_{(5)} = 5 (b_5 + b_{15} + \dots)$$

$$\Sigma y_{(7)} = 7 (b_7 + \dots)$$

$$\Sigma y_{(9)} = 9 (b_9 + \dots)$$

Hiermit lassen sich alle b_n berechnen.

Verschiebt man den Anfangspunkt um eine Viertelwelle, so enthält die neue Anfangsordinate für $x = \pi/2$ alle Amplituden der Sinusglieder a_n , die abwechselnd positiv und negativ sind, da $\sin \frac{\pi}{2}$ positiv ist, wenn

$$n = 4n + 1$$

und negativ, wenn

$$n = 4n - 1.$$

Daher ist

$$y'_{(1)} = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots$$

Teilt man nun von dem neuen Anfangspunkt die Halbwelle wieder in 3, 5, 7, 9 Teile, so werden die Ordinatensummen

$$\Sigma y'_{(3)} = 3 (-a_3 + a_9 - a_{15} \dots)$$

$$\Sigma y'_{(5)} = 5 (a_5 - a_{15} \dots)$$

$$\Sigma y'_{(7)} = 7 (-a_7 + \dots)$$

$$\Sigma y'_{(9)} = 9 (a_9 - \dots)$$

Hiermit können alle a_n berechnet werden.

Von den rein zeichnerischen Verfahren dürfte das von R. Rothe angegebene (ETZ 1920, S. 1000) das einfachste sein. Bei diesem erhält man sofort die resultierenden Amplituden

$$i_{nm} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Es besteht darin, daß man die aufeinanderfolgenden Ordinaten der in n Teile geteilten ganzen Periode einer gegebenen Kurve unter den Winkeln $n \frac{2\pi}{n}$ aneinanderreihet. Man verwendet dazu zweckmäßig eine auf Pauspapier gezeichnete Windrose, deren Strahlen unter sich die Winkel $\frac{2\pi}{n}$ bilden, und die man für den Zweck immer wieder verwenden kann. Die Summe der geometrisch addierten Ordinaten ergibt mit $\frac{2}{n}$ multipliziert die gesuchte Amplitude i_{nm} . Der Beweis ergibt sich durch Entwicklung der Summen in Gl. 99 und 100:

$$a_n = \frac{2}{n} \left[y_1 \sin n \left(\frac{2\pi}{n} \right) + y_2 \sin n \left(\frac{2\pi}{n} \right) + \dots + y_n \sin n \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

$$b_n = \frac{2}{n} \left[y_1 \cos n \left(\frac{2\pi}{n} \right) + y_2 \cos n \left(\frac{2\pi}{n} \right) + \dots + y_n \cos n \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

Drückt man nun die geometrische Addition der Sinus- und Kosinus-Glieder symbolisch aus und multipliziert die erste Gleichung mit j und addiert sie zu der zweiten, so wird

$$i_{xm} = b_x + ja_x = \frac{2}{n} \left(y_1 e^{jx \left(\frac{2\pi}{n} \right)} + y_2 e^{jx 2 \left(\frac{2\pi}{n} \right)} + \dots + y_n e^{jx 2\pi} \right).$$

Bei symmetrischen Kurven läßt sich das Verfahren sinngemäß für die Ordinaten einer Halbwelle anwenden, indem man sie unter den Winkeln $x \frac{\pi}{n}$ aneinanderreihet, worin n die Anzahl Teilpunkte der Halbwelle ist.

Weitere graphische Methoden s. Houston & Kennelly, ETZ 1898, S. 714; Varreka, ETZ 1907, S. 482; Pichelmeyer u. Schrutka, ETZ 1912, S. 129; v. Sanden, Archiv f. Elektrotechnik 1912, Bd. I, S. 42; Slaby, Archiv f. Elektrotechnik, Bd. II, S. 19 und ETZ 1919, S. 535. Über experimentelle Aufnahme von Kurven s. Ohrlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven. Braunschweig 1906. Über einen mechanischen Analysator nach Chubb s. Hartenheim, ETZ 1917, S. 48.

34. Effektivwert und Leistung mehrwelliger Ströme.

Es seien zwei mehrwellige Wechselströme gegeben

$$i = \Sigma (a_x \sin x \omega t + b_x \cos x \omega t) = \Sigma i_{xm} \sin (x \omega t + \psi_x),$$

$$i' = \Sigma (a'_x \sin x \omega t + b'_x \cos x \omega t) = \Sigma i'_{xm} \sin (x \omega t + \psi'_x).$$

Es soll der Mittelwert ihres Produktes $\frac{1}{T} \int_0^T i i' dt$ berechnet werden.

Für zwei Sinusfunktionen von verschiedener Frequenz ist der Mittelwert des Produktes gleich Null, ebenso für das Produkt einer Sinus- und einer Kosinusfunktion von gleicher Frequenz. In dem Produkt $i i'$ braucht man daher nur Faktoren zu berücksichtigen, die sich aus zwei Sinus- oder zwei Kosinusgliedern von gleicher Frequenz zusammensetzen, für die n denselben Wert hat. Daher ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T i i' dt = \sum \frac{1}{2} (a_x a'_x + b_x b'_x) = \sum \frac{1}{2} i_{xm} i'_{xm} \cos (\psi_x - \psi'_x) \quad (105)$$

Sind die beiden Ströme i und i' identisch, so erhält man das Quadrat des Effektivwertes (J)

$$J^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \sum \frac{1}{2} (a_x^2 + b_x^2) = \sum \frac{1}{2} i_{xm}^2.$$

Hierin ist

$$\frac{1}{2} i_{xm}^2 = J_x^2$$

das Quadrat des Effektivwertes der Oberwelle von der Periodenzahl $n\omega$. Daher ist der Effektivwert des mehrwelligen Stromes

$$J = \sqrt{\Sigma J_n^2} = \sqrt{J_1^2 + J_3^2 + J_5^2 + \dots} \quad (106)$$

Er ist gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate der Effektivwerte der einzelnen Harmonischen.

Ersetzt man in Gl. 105 i' durch eine Spannung p , so erhält man die mittlere Leistung:

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T p i \, dt = \sum \frac{1}{2} p_{nm} i_{nm} \cos(\psi_n - \psi'_n) \quad (107)$$

Hierin ist

$$\frac{1}{2} p_{nm} i_{nm} = P_n J_n$$

das Produkt der Effektivwerte der n ten Strom- und Spannungswelle und $\cos(\psi_n - \psi'_n) = \cos \varphi_n$ der Kosinus ihrer Phasenverschiebung. Die mittlere Leistung ist

$$N = \Sigma P_n J_n \cos \varphi_n = P_1 J_1 \cos \varphi_1 + P_3 J_3 \cos \varphi_3 + P_5 J_5 \cos \varphi_5 + \dots \quad (108)$$

Die Leistung ist die Summe der Leistungen der einzelnen Harmonischen. Oberwellen von verschiedener Periodenzahl sind voneinander in bezug auf die mittlere Leistung vollständig unabhängig. Aus Gl. 106 ergibt sich die Stromwärme in einem Ohmschen Widerstand R

$$J^2 R = R(J_1^2 + J_3^2 + J_5^2 + \dots).$$

Jede Oberwelle erzeugt eine von den übrigen unabhängige Stromwärme.

In dem Produkt $\Sigma \frac{1}{2} p_{nm} i_{nm} \cos(\psi_n - \psi'_n)$ kommen die Effektivwerte der resultierenden Strom- und Spannungswelle nicht vor. Man setzt trotzdem analog wie bei einwelligen Wechselströmen

$$N = PJ \cos \varphi$$

und nennt $\cos \varphi$ den Leistungsfaktor. Im Gegensatz zu einwelligen Strömen ist er hier von den Effektivwerten von Strom und Spannung abhängig (s. a. S. 95).

35. Formfaktor und Scheitelfaktor mehrwelliger Ströme.

Die Effektivwerte haben praktisch die größte Bedeutung, weil sie mit den technischen Meßinstrumenten gemessen werden. Über die Kurvenform sagen sie nichts aus.

Für die Eisenverluste (s. Kap. X) ist der Höchstwert des Flusses innerhalb der Periode maßgebend, für die elektrische Beanspruchung der Isolation der Höchstwert der Spannung.

Der Höchstwert des Flusses ergibt sich nach Kap. I S. 10 aus

Der Formfaktor ξ war auf Seite 9 definiert als das Verhältnis von Effektivwert zum Mittelwert. Für die Sinuskurve war $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$.

Einen Anhalt über die Abhängigkeit des Formfaktors von der Kurvenform geben folgende beiden Beispiele.

1. Das Rechteck. Hier ist $J = i_m$, $M(i) = i_m$, $\xi = 1$.

2. Das Dreieck mit der Höhe i_m . Die quadratische Kurve der i^2 ist aus zwei Parabeln zusammengesetzt, deren Mittelwert $\frac{1}{3} i_m^2$ ist. Hier ist

$$J = \frac{i_m}{\sqrt{3}}, \quad M(i) = \frac{i_m}{2}, \quad \xi = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15.$$

Die rechteckige Kurve, die flacher ist als die Sinuslinie, hat somit einen kleineren Formfaktor als diese, die spitzer dreieckige Kurve einen größeren.

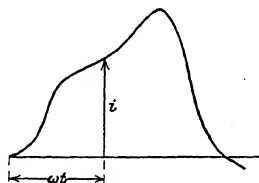


Fig. 67a.

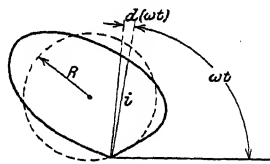


Fig. 67b.

Graphische Ermittlung des Effektivwertes nach Fleming

Trägt man eine in rechtwinkligen Koordinaten gegebene Stromkurve Fig. 67a in Polarkoordinaten auf, Fig. 67b, so ist der Flächeninhalt der Polarkurve

$$F = \int_0^{\pi} \frac{i^2}{2} d(\omega t) = \frac{\pi}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i^2 dt = \frac{\pi}{2} J^2,$$

daher der Effektivwert

$$J = \sqrt{2} R,$$

worin R der Radius eines flächengleichen Kreises ist. Für eine Sinuslinie ist die Polarkurve ein Kreis.

Der Scheitelfaktor σ war nach S. 10 definiert als Verhältnis des Höchstwertes zum Effektivwert, er ist um so größer, je spitzer die Kurve ist. Für das Rechteck ist $\sigma = 1$, für die Sinuslinie $\sigma = \sqrt{2} = 1,414$, für das Dreieck $\sigma = \sqrt{3} = 1,73$.

36. Die Summe von zwei mehrwelligen Strömen.

Die Summe von zwei Sinusströmen ist wieder ein Sinusstrom. Die Summe von zwei mehrwelligen Strömen hat dagegen im allgemeinen eine andere Kurvenform als jeder Teilstrom, weil die Oberströme sich unter anderen Phasenwinkeln zusammensetzen als die Grundwellen.

Sind z. B. die Grundwellen von zwei gleichgroßen Strömen von gleicher Kurvenform um φ gegeneinander verschoben, die κ^{ten} Oberwellen um $\kappa\varphi$, so werden die resultierenden Amplituden

$$i'_{1m} = i_{1m} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} \quad i'_{\kappa m} = i_{\kappa m} \sqrt{2(1 + \cos \kappa \varphi)}.$$

Ist etwa $\kappa\varphi = \pi$ oder ein ungerades Vielfaches von π , so heben sich die beiden Oberwellen heraus. Für $\varphi = 60^\circ$ ist die Summe der Grundwellen $i'_{1m} = i_{1m} \sqrt{3}$, dagegen heben sich die dritten, neunten usf. Oberwellen fort, der Summenstrom nähert sich der Sinusform mehr als die Teilstrome.

Ist hingegen $\kappa\varphi = 2\pi$ oder ein Vielfaches davon, so ergeben die beiden Oberwellen die doppelte Amplitude. Für $\varphi = 120^\circ$ ist die Summe der Grundwellen $i'_{1m} = i_1$, die Summe der dritten Oberwellen $i'_{3m} = 2i_{3m}$ und ebenso für die neunten usf. Hier ist der Summenstrom stärker verzerrt als die Teilstrome.

Das Verhältnis des Oberstromes zum Grundstrom ist im Summenstrom ebenso groß wie bei den gleichen Teilstromen, wenn $\varphi = \frac{2z\pi}{\kappa \pm 1}$ ist, worin z eine ganze Zahl ist. Denn dann ist $\cos \kappa\varphi = \cos(2z\pi \pm \varphi) = \cos \varphi$. Zwei Ströme von gleicher Kurvenform geben im allgemeinen nur einen ähnlichen Strom, wenn $\varphi = 0$ ist.

37. Stromverzerrung durch Selbstinduktion und Kapazität.

Der Ladestrom eines Kondensators bei einer mehrwelligen Spannung

$$p = \Sigma(a_{\kappa} \sin \kappa \omega t + b_{\kappa} \cos \kappa \omega t)$$

$$\text{ist} \quad i = C \frac{dp}{dt} = \omega C \Sigma(\kappa a_{\kappa} \cos \kappa \omega t - \kappa b_{\kappa} \sin \kappa \omega t).$$

Die Oberwellen des Stromes erscheinen um so stärker ausgeprägt als die der Spannung, je höher ihre Frequenz ist. Fig. 68 zeigt die Oszillogramme des Ladestromes und der Spannung eines Kondensators.

Der Strom einer Drosselspule von der Induktivität L wird hingegen, wenn der Ohmsche Widerstand vernachlässigt werden kann,

$$i = \frac{1}{L} \int p dt = \frac{1}{\omega L} \Sigma \left(-\frac{a_{\kappa}}{\kappa} \cos \kappa \omega t + \frac{b_{\kappa}}{\kappa} \sin \kappa \omega t \right).$$

Hier sind die Oberwellen des Stromes um so stärker gedämpft, je höher ihre Frequenz ist, der Strom nähert sich der Sinuskurve mehr als die Spannung, wie das Oszillogramm Fig. 69 zeigt, den Strom einer Drosselspule bei derselben Spannung gibt Fig. 68 für den Kondensator.

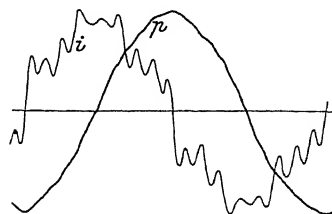


Fig. 68.

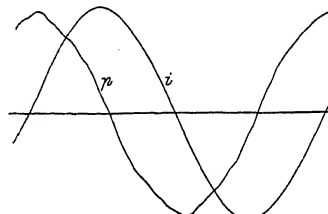


Fig. 69.

Beispiel. Der Ladestrom eines Kondensators bei dreieckiger Spannung. In der ersten halben Periode wächst p von $-p_m$ \rightarrow $+p_m$, dann ist

$$i = C \frac{dp}{dt} = C \frac{4p_m}{T} = C \frac{2}{\pi} \omega p_m,$$

während der zweiten halben Periode, während der p von $+p_m$ \rightarrow $-p_m$ fällt, hat i denselben Wert wie zuvor, aber mit negativem Zeichen. Beim Übergang hat i zwei Werte, nämlich $\pm C \frac{2}{\pi} \omega p_m$.

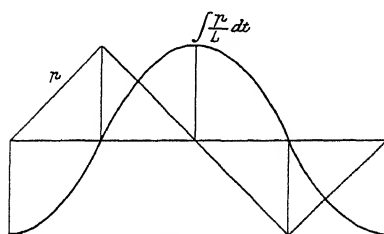


Fig. 70.

Strom hat rechteckige Kurven und ist stärker verzerrt als Spannung.

Der Strom einer Drosselspule mit sehr kleinem Widerstand bei dreieckiger Spannung die Parabelbögen zusammengesetzte Integralkurve des Dreiecks Fig. 70 sie ist weniger verzerrt als Spannungskurve.

Verhalten eines Schwingungskreises bei verzerrter Spannung.

Ein Schwingungskreis mit Widerstand, Selbstinduktion Kapazität in Reihenschaltung bietet Strömen von verschiedener Frequenz nach Kap. II S. 26 sehr ungleiche Scheinwiderstände. Ist er an eine mehrwellige Spannung angeschlossen, so berechnet sich die Amplituden der Stromkurve aus denen der Spannungskurve mittels der Scheinwiderstände

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (1)$$

die Phasenverschiebungswinkel aus

$$\operatorname{tg} \varphi_{\kappa} = \frac{\kappa \omega L - \frac{1}{\kappa \omega C}}{R}, \quad \dots \quad (110)$$

wobei R , L und C als unabhängig von der Frequenz und vom Strom angenommen sind.

Da der Blindwiderstand sich mit der Frequenz sehr stark ändert, sind die Oberwellen des Stromes teils stärker teils schwächer ausgeprägt. Für $\kappa \omega L = \frac{1}{\kappa \omega C}$ ist die Oberwelle des Stromes der Ordnung κ mit ihrer Spannungswelle in Phase, und hat ihr Maximum. Für mehrwellige Ströme gibt es daher so viele Resonanzmöglichkeiten wie Wellen in der Spannungscurve vorkommen.

Beispiel. Für $R = 10$ Ohm, $C = 5 \mu\text{F}$, $L = 0,225$ Henry tritt Resonanz ein für

$$\kappa f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{10^3}{2\pi\sqrt{5 \cdot 0,225}} = 150,$$

also für die Grundwelle $\kappa = 1$ bei $f = 150$

" " dritte Oberwelle $\kappa = 3$ " $f = 50$

" " fünfte " $\kappa = 5$ " $f = 30$ usw.

Ist die Spannung rechteckig und ihre Amplitude $p_m = 100$ Volt, so sind die Effektivwerte nach Gl. 95 $P_{\kappa} = \frac{4}{\pi\sqrt{2}} p_m$, also $P_1 = 90$ Volt,

$P_3 = 30$ Volt, $P_5 = 18$ Volt usw. Für $f = 50$ besteht Resonanz für die dritte Oberwelle, die einzelnen Effektivwerte sind:

$$J_1 = 0,159 \text{ Amp.}, \quad J_3 = 3,0 \text{ Amp.}, \quad J_5 = 0,079 \text{ Amp. usw.}$$

Die Grundwelle ist nur $5,3\%$ von der dritten Oberwelle, die höheren Oberwellen sind noch wesentlich kleiner. Der Effektivwert der resultierenden Stromkurve ist daher nur unmerklich von dem der dritten Oberwelle verschieden.

Durch Veränderung von L und C bei konstanter Grundfrequenz kann Resonanz für die verschiedenen Oberschwingungen hergestellt werden, man kann sie experimentell trennen. Ein hierauf beruhendes Verfahren ist von Armagnat (Journal de physique 1902) angegeben.

Praktisch werden Resonanzstromkreise zur Verstärkung bestimmter Oberwellen bei Hochfrequenzgeneratoren für drahtlose Telegraphie angewendet.

Man verwendet sie mitunter auch zur Unterdrückung störender Oberschwingungen in niederfrequenten Stromkreisen, z. B. der Nuten- oder Oberschwingungen von Wechselstrommaschinen, die infolge ihrer Höhe für benachbarte Telephonleitungen störend werden. Ein auf die betr. Frequenz abgestimmter Schwingungskreis nimmt, zwischen Hin- und Rückleitung geschaltet, fast nur einen Strom dieser Frequenz auf

und bildet für die Oberschwingung der Spannung einen um so besseren Kurzschluß, je geringer sein Ohmscher Widerstand ist.

Als Folge der ungleichen Kurvenformen von Strom und Spannung gilt ferner, daß für einen Kondensator das Verhältnis der Effektivwerte $\frac{J}{P}$ kein direktes Maß für die Kapazität ist.

Ist $P = \sqrt{\Sigma P_{\kappa}^2}$, so ist der Ladestrom

$$J = \omega C \sqrt{\Sigma (\kappa P_{\kappa})^2},$$

daher

$$\frac{J}{P} = \omega C \sqrt{\frac{\Sigma (\kappa P_{\kappa})^2}{\Sigma P_{\kappa}^2}}.$$

Der Wurzelausdruck ist für eine Sinuskurve gleich 1, für andere kann er stark davon abweichen.

Für die dreieckige Spannungskurve war nach S. 92 der Ladestrom rechteckig. Hier ist also

$$P = \frac{p_m}{\sqrt{3}}, \quad J = i_m = \frac{2}{\pi} \omega C p_m,$$

daher

$$\frac{J}{P} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \omega C = 1,10 \omega C.$$

Bei einer Induktivität (mit kleinem Ohmschen Widerstand) ist

$$J = \frac{1}{\omega L} \sqrt{\Sigma \left(\frac{P_{\kappa}}{\kappa}\right)^2};$$

daher

$$\frac{P}{J} = \omega L \sqrt{\frac{\Sigma P_{\kappa}^2}{\Sigma \left(\frac{P_{\kappa}}{\kappa}\right)^2}}.$$

Dieser Ausdruck weicht im allgemeinen wenig von 1 ab. Für das Dreieck war z. B. die Stromkurve aus 2 Parabelstücken zusammengesetzt (s. S. 92, Fig. 79). Hier erhält man

$$J = i_m \sqrt{\frac{8}{15}} = \frac{p_m}{\omega L} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{15}} \quad P = \frac{p_m}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{P}{J} = \omega L \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{15}{6}} = 1,006 \omega L.$$

Die Selbstinduktion kann daher wesentlich genauer gemessen werden. Um eine Kapazität durch Strom- und Spannungsmessung zu bestimmen, schaltet man sie mit einer veränderlichen Induktivität

in Reihe und stellt auf Resonanz für die Grundwelle ein. Man hat dann

$$\omega C = \frac{1}{\omega L},$$

worin ωL durch Strom- und Spannungsmessung genügend genau bestimmt werden kann.

38. Graphische Darstellung von mehrwelligen Strömen.

Die Verwendung der Vektordiagramme bietet bei den Wechselstromproblemen so viele Vorteile, daß man sie auch bei mehrwelligen Strömen verwendet. Es soll nun untersucht werden, welchen Fehler man hierbei begeht, und wann die graphische Darstellung genau ist. Nach Seite 89 Gl. 108 ist die Leistung eines mehrwelligen Stromes

$$N = \sum P_n J_n \cos \varphi_n.$$

Diese Leistung kann nicht direkt durch das Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung der resultierenden Kurven ausgedrückt werden.

Ersetzt man die mehrwellige Spannung P durch eine einwellige Spannung von gleichem Effektivwert, und ebenso den mehrwelligen Strom J durch einen einwelligen vom gleichen Effektivwert, so kann die Leistung auch geschrieben werden

$$N = PJ \cos \varphi.$$

Hierin ist P die äquivalente Sinusspannung, J der äquivalente Sinusstrom, $\cos \varphi$ der Leistungsfaktor.

Mit diesen Größen rechnet man in der Praxis gewöhnlich und trägt J gegen P unter dem Winkel φ im Diagramm auf.

Es ist dann

$$\frac{P}{J} = z \text{ der resultierende Scheinwiderstand,}$$

$$\frac{N}{J^2} = \frac{P \cos \varphi}{J} = R \text{ der resultierende Wirkwiderstand,}$$

$$\frac{P \sin \varphi}{J} = \sqrt{z^2 - R^2} = X \text{ der resultierende Blindwiderstand.}$$

Diese Größen, die sich somit stets durch Messung der Effektivwerte von Strom und Spannung und der Leistung ermitteln lassen, sind von der Kurvenform mehr oder weniger abhängig.

Der Wirkwiderstand weicht vom Ohmschen Widerstand im allgemeinen ab, weil bei hohen Periodenzahlen der Strom sich ungleichmäßig über den Querschnitt verteilt, was einer Erhöhung des Widerstandes, besonders für die Oberschwingungen, von hoher Fre-

Sieht man davon ab und betrachtet R als konstant, so ist

$$P \cos \varphi = RJ = R \sqrt{\sum J_{\kappa}^2} = \sqrt{\sum P_{\kappa}^2 \cos^2 \varphi_{\kappa}},$$

und
$$P \sin \varphi = \sqrt{\sum P_{\kappa}^2 \sin^2 \varphi_{\kappa}}.$$

Der Blindwiderstand $X = \frac{P \sin \varphi}{J}$ weicht stets von dem Wert für die Grundfrequenz mehr oder weniger ab, auch wenn R , L und C als konstant betrachtet werden.

Für einen induktiven Stromkreis ist

$$X_{i\kappa} = \kappa \omega L = \kappa X_i.$$

Daher

$$J_{\kappa} = \frac{P_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa}}{\kappa X_i}$$

$$J = \sqrt{\sum J_{\kappa}^2} = \frac{1}{X_i} \sqrt{\sum \left(\frac{P_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa}}{\kappa} \right)^2}.$$

Dagegen ist

$$P \sin \varphi = \sqrt{\sum (P_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa})^2},$$

daher

$$X = \frac{P \sin \varphi}{J} = X_i \sqrt{\frac{\sum (P_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa})^2}{\sum \left(\frac{P_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa}}{\kappa} \right)^2}}.$$

Die Abweichung, die durch den Wurzel Ausdruck gegeben ist ist meistens nicht groß.

Bei einem Stromkreis mit Widerstand und Kapazität ist dagegen der Fehler größer, es wird

$$X = \frac{P \sin \varphi}{J} = X_c \sqrt{\frac{\sum (P_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa})^2}{\sum (\kappa P_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa})^2}},$$

worin $X_c = \frac{1}{\omega C}$ der Blindwiderstand für die Grundperiodenzahl ist.

Analog definiert man

$$\frac{J}{P} = y = \text{der resultierende Scheinleitwert},$$

$$\frac{N}{P^2} = \frac{J \cos \varphi}{P} = g = \text{der resultierende Wirkleitwert},$$

$$\sqrt{y^2 - g^2} = \frac{J \sin \varphi}{P} = b = \text{der resultierende Blindleitwert}.$$

Während nach der Definition des Leistungsfaktors

$$PJ \cos \varphi = \sum P_{\kappa} J_{\kappa} \cos \varphi_{\kappa}$$

Nimmt man wieder R als konstant an, so ist

$$J_{\kappa} = \frac{1}{R} P_{\kappa} \cos \varphi_{\kappa}$$

und

$$\Sigma P_{\kappa} J_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa} = \Sigma \frac{P_{\kappa}^2}{R} \cos \varphi_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa}.$$

Dagegen war

$$P \sin \varphi = \sqrt{\Sigma P_{\kappa}^2 \sin^2 \varphi_{\kappa}}$$

$$J = \sqrt{\Sigma J_{\kappa}^2} = \frac{1}{R} \sqrt{\Sigma P_{\kappa}^2 \cos^2 \varphi_{\kappa}}.$$

Man erhält daher

$$\frac{\Sigma P_{\kappa} J_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa}}{P J \sin \varphi} = \frac{\Sigma P_{\kappa}^2 \cos \varphi_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa}}{\sqrt{\Sigma (P_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa})^2} \sqrt{\Sigma (P_{\kappa} \cos \varphi_{\kappa})^2}} = F. \quad (111)$$

Der Faktor F ist stets kleiner als 1 und wird Induktionsfaktor genannt.

Bei einem Stromkreis mit R und L ist

$$P_{\kappa} \cos \varphi_{\kappa} = R J_{\kappa}, \quad P_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa} = \kappa X_{\kappa} J_{\kappa},$$

daher

$$F = \frac{\Sigma \kappa J_{\kappa}^2}{\sqrt{\Sigma (\kappa J_{\kappa})^2} \sqrt{\Sigma J_{\kappa}^2}} = \frac{J_1^2 + 3J_3^2 + 5J_5^2 + \dots}{J \sqrt{J_1^2 + 9J_3^2 + 25J_5^2 + \dots}}. \quad (111a)$$

Enthält der Stromkreis Kapazität und Widerstand, und setzt man

$$P_{\kappa} \sin \varphi_{\kappa} = \frac{J_{\kappa} X_{\kappa}}{\kappa},$$

so erhält man analog

$$F = \frac{J_1^2 + \frac{1}{3}J_3^2 + \frac{1}{5}J_5^2 + \dots}{J \sqrt{J_1^2 + \frac{1}{9}J_3^2 + \frac{1}{25}J_5^2 + \dots}} \dots \quad (111b)$$

Daher ist F stets kleiner als 1.

Die Bedingung, wann die graphische Addition von Strömen und Spannungen im Diagramm richtig ist, ergibt sich wie folgt.

Bei parallelgeschalteten Stromkreisen ist die Spannung P für alle dieselbe. Sind J' , J'' die Ströme, N' , N'' die Leistungen zweier paralleler Stromkreise, so ist die gesamte Leistung

$$N = N' + N'' = P(J' \cos \varphi' + J'' \cos \varphi'') = P J \cos \varphi,$$

daher

$$J' \cos \varphi' + J'' \cos \varphi'' = J \cos \varphi.$$

Der resultierende Wirkstrom ist nach der Definition des Leistungsfaktors gleich der Summe der Wirkströme der parallelen Zweige.

Die Blindströme können dagegen nur unter Berücksichtigung ihrer Induktionsfaktoren addiert werden.

$$F P J \sin \varphi = P(F' J' \sin \varphi' + F'' J'' \sin \varphi'')$$

$$F J \sin \varphi = F' J' \sin \varphi' + F'' J'' \sin \varphi''.$$

Diese Gleichung ist aber im allgemeinen im Diagramm nicht erfüllt. Im Diagramm ist vielmehr

$$J \sin \varphi = J' \sin \varphi' + J'' \sin \varphi''.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit F und subtrahiert sie von der vorhergehenden, so ergibt sich die Bedingung, unter der das Diagramm die Addition richtig darstellt:

$$(F' - F)J' \sin \varphi' + (F'' - F)J'' \sin \varphi'' = 0.$$

Analog erhält man bei in Reihe geschalteten Stromkreisen

$$(F' - F)P' \sin \varphi' + (F'' - F)P'' \sin \varphi'' = 0.$$

Die graphische Addition von Strömen und Spannungen ist hier nach stets richtig, wenn

$$F' = F'' = F$$

ist. Dies gilt z. B. für Stromkreise, in denen das Verhältnis von R , L und C das gleiche ist, dann ist nämlich

$$\varphi' = \varphi'' = \varphi.$$

Die graphische Addition ist ferner richtig, wenn alle Stromkreise bis auf einen induktionsfrei sind. Dann ist nämlich der resultierende Blindstrom gleich dem des einen induktiven Stromkreises

$$J \sin \varphi = J' \sin \varphi',$$

daher

$$F = F'.$$

Bei Stromkreisen, bei denen die Kapazität keine Rolle spielt und bei denen der induktive Blindwiderstand der Periodenzahl proportional ist, weichen die Induktionsfaktoren auch für verschiedene Verhältnisse von R zu L nicht viel voneinander ab. Dann ist die graphische Addition sehr angenähert richtig.

Beispiel. Die Spannung zweier parallelgeschalteter Stromkreise sei wie folgt zusammengesetzt.

$$P_1 = 100, \quad P_3 = 30, \quad P_5 = 20.$$

Im ersten Stromkreis ist $R' = 5, \quad \omega L' = 5,$

im zweiten „ „ $R'' = 4, \quad \omega L'' = 8.$

Man erhält

$$\begin{array}{ll} P = 106,3 & \\ J' = 14,29 & J'' = 11,26 \\ N' = 1021 & N'' = 507 \\ J' \cos \varphi' = 9,605 & J'' \cos \varphi'' = 4,770 \\ J' \sin \varphi' = 10,57 & J'' \sin \varphi'' = 10,20 \\ F' = 0,952 & F'' = 0,965. \end{array}$$

Die beiden Induktionsfaktoren weichen also nur um $1,4\%$ voneinander ab. Der Gesamtstrom ist

$$J = 25,22, \quad J \cos \varphi = 14,375, \quad J \sin \varphi = 20,72, \quad F = 0,961,$$

während $J' \sin \varphi' + J'' \sin \varphi'' = 20,77$ ergibt, also ein von $J \sin \varphi$ nur um $0,25\%$ abweichendes Resultat.

Achstes Kapitel.

Mehrphasenströme.

39. Die Mehrphasensysteme. — 40. Symmetrische Mehrphasensysteme. — 41. Verkettete Mehrphasensysteme. — 42. Balancierte und unbalancierte Mehrphasensysteme. — 43. Das Dreiphasensystem. — 44. Berechnung einer Sternschaltung. — 45. Dreieckschaltung. Die Beziehung der Phasenströme zu den Linienströmen. — 46. Transfigurierung einer Dreieckschaltung in eine Sternschaltung. — 47. Berechnung der Spannungserhöhung bei einem Mehrphasensystem. — 48. Das Zweiphasen-Dreileitersystem. — 49. Zerlegung eines unsymmetrischen Mehrphasensystems in zwei symmetrische. — 50. Mehrwellige Ströme in Mehrphasensystemen. — 51. Messung der Leistung von Mehrphasenströmen.

39. Die Mehrphasensysteme.

Auf dem Anker einer zweipoligen Maschine seien eine Anzahl voneinander isolierter Spulen auf dem Umfang verteilt angeordnet (s. Fig. 71). Die als sinusförmig angenommenen Spannungen der drei Spulen haben alle dieselbe Frequenz, sie sind aber in der Phase gegeneinander verschoben. Sie sind

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{1m} \sin \omega t, \\ p_2 &= p_{2m} \sin (\omega t - \alpha_{12}), \\ p_3 &= p_{3m} \sin (\omega t - \alpha_{13}), \end{aligned}$$

wenn Spule 1 zur Zeit $t=0$ den ganzen Fluß umschlingt und Spule 2 gegen 1 um den Winkel α_{12} , Spule 3 gegen 1 um $\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$ zurückliegt.

Schließt man jede Spule an einen Stromkreis, so erhält man eine entsprechende Zahl von Strömen gleicher Periodenzahl, deren Größen von den Spannungen und den Scheinwiderständen der Stromkreise abhängen, und deren Phasenwinkel durch die der Spannungen und die Phasenwinkel der Belastungen gegeben sind.

Ein solches System, bei dem eine Anzahl gegeneinander phasenverschobener Spannungen von gleicher Frequenz gegeneinander phasenverschobene Wechselströme erzeugt, nennt man allgemein ein Mehrphasensystem.

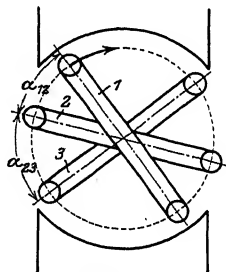


Fig. 71.

Für die einzelnen Teile des Mehrphasensystems, von dem jedes aus der Stromquelle (der Spule), der Leitung und der Lastung besteht, wird häufig die nicht ganz korrekte Bezeichnung „Phase“ verwendet.

Nach der Art des Aufbaus und der Wirkungsweise unterscheidet man bei den Mehrphasensystemen:

1. symmetrische und unsymmetrische Systeme,
2. abhängige oder verkettete und unverkettete Systeme,
3. balancierte und unbalancierte Systeme.

40. Symmetrische Mehrphasensysteme.

Ein Mehrphasensystem heißt symmetrisch, wenn alle Spannungen gleichgroß sind und je zwei aufeinanderfolgende Spannungen den gleichen Phasenwinkel gegeneinander phasenverschoben sind. Ist n die „Phasenzahl“, so ist jeweils die Spannung einer Phase gegen die der vorhergehenden um $\frac{1}{n}$ tel der Periode, d. h. um $\frac{2\pi}{n}$ verzögert.

Somit sind die n Spannungen eines symmetrischen „ n -Phasensystems“

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_m \sin \omega t \\ p_2 &= p_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right) \\ p_3 &= p_m \sin \left(\omega t - 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ p_n &= p_m \sin \left[\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

Beispiele. $n=1$ ergibt nur eine Spannung, d. h. ein gewöhnliches Einphasensystem mit einer Hin- und einer Rückleitung.

$n=2$ ergibt zwei um 180° gegeneinander verschobene, gleichphasige, aber einander entgegengerichtete Spannungen. Schaltet man die Spulen so hintereinander, daß die Spannungen untereinander gleichgerichtet sind, so kann man jede

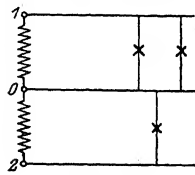


Fig. 72.

man einen Stromkreis wirken lassen (s. Fig. 72), indem man von dem Verbindungspunkt O einen dritten Leiter zieht. In diesem Leiter fließt die Differenz der Ströme der beiden Außenleiter, sie ist gleich Null, wenn die Belastung der beiden Stromkreise gleich ist. Der dritte Leiter heißt daher Nulleiter,

schobene Spannungen, das sog. Dreiphasensystem. Da $n=2$ noch gleichphasige Spannungen ergibt, ist das Dreiphasensystem das erste eigentliche Mehrphasensystem, dem man in der Zahlenreihe für n begegnet und somit das von kleinster Phasenzahl.

$n=4$ ergibt vier um 90° gegeneinander phasenverschobene Spannungen, das Vierphasensystem. Je zwei dieser Spannungen sind wieder um 180° gegeneinander phasenverschoben. Schaltet man die Spulen so, daß diese Spannungen untereinander gleichgerichtet sind, so erhält man zwei Systeme mit um 90° gegeneinander verschobenen Spannungen, also ein Zweiphasensystem, das aber unsymmetrisch ist (s. S. 118).

41. Verkettete Mehrphasensysteme.

Arbeitet jede Phase für sich auf einen Belastungsstromkreis, so sind für n Phasen zur Fortleitung des Stromes $2n$ Leitungen erforderlich. Die Zahl der Leitungen kann bei symmetrischen Systemen auf n , bei unsymmetrischen auf $(n+1)$ herabgesetzt werden durch elektrische Verkettung der Phasen.

Von den Verkettungen sind am wichtigsten die Sternschaltungen und die Ringschaltungen. Auch Kombinationen von beiden kommen vor.

1. Die Sternschaltung.

Sie entsteht dadurch, daß die Anfänge aller Spulen zu einem Knotenpunkt, dem Sternpunkt oder neutralen Punkt zusammengelegt werden, während die Enden die Klemmen für die Fortleitung bilden.

Ist das System unsymmetrisch, so ist zu den n Leitungen noch eine weitere erforderlich. Fig. 73 zeigt ein unsymmetrisches Vierphasensystem. Die Spulen sind um den Phasenverschiebungswinkel α zwischen den Spannungen benachbarter Spulen gegeneinander verschoben gezeichnet. Die Belastung wird durch vier gleichgroße Scheinwiderstände in analoger Schaltung gebildet, die Sternpunkte O und O' sind durch einen fünften Leiter verbunden. Wegen der Gleichheit der Spannungen und der Belastungswiderstände sind die vier Ströme gleichgroß und gegeneinander um denselben Winkel α wie die Spannungen verschoben. Nach dem ersten Kirchhoffschen Satz ist die Summe aller in einem Knotenpunkt zusammenfließenden Ströme in jedem Augenblick gleich Null, daher ist der Strom im Verbindungsleiter der Sternpunkte

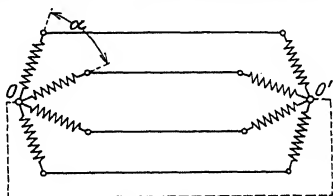


Fig. 73.

$$i_0 = -(i_1 + i_2 + i_3 + i_4),$$

In dem Vektordiagramm (Fig. 74) ist OA die geometrische Summe der 4 Ströme J_1 bis J_4 , und der Strom J_0 ist die im Sinne AO durchlaufene Schlußlinie des Strompolygons. J_0 ist dabei positiv vom Stromerzeuger zum Stromverbraucher gerechnet.

Ist das System symmetrisch, d. h. sind je zwei Spannungen um $\frac{2\pi}{n}$ gegeneinander phasenverschoben, so haben bei symmetrischer

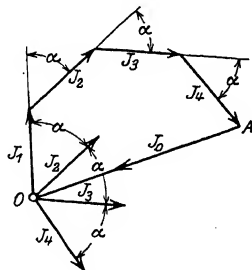


Fig. 74.

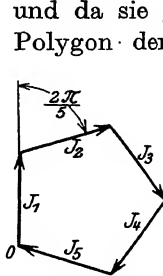


Fig. 75.

Belastung auch die Ströme diese Phasenverschiebung untereinander, und da sie gleichgroß sind, schließt sich das Polygon der Ströme, wie Fig. 75 für $n=5$ zeigt. Die Verbindungsleitung der Sternpunkte ist stromlos und kann fortgelassen werden. Weil sie bei einem symmetrisch belasteten symmetrischen Mehrphasensystem stromlos ist, heißt die Verbindung der Sternpunkte Nulleiter oder neutraler Leiter.

Zur Fortleitung eines symmetrischen n -Phasensystems sind somit n Leitungen erforderlich.

Phasenspannung und Linienspannung. Die Spannung zwischen dem Sternpunkt eines Sternsystems und dem Endpunkt einer Spule (Phase) heißt die

Phasenspannung. Alle Spulenenden haben gegen den Sternpunkt die gleiche effektive Spannung. Bei einem symmetrischen System ist er der Spannungsmittelpunkt des Systems. Die Spannung zwischen zwei benachbarten Spulenenden ist die Differenz der beiden Phasenspannungen dieser Spulen, sie heißt die Linienspannung oder die verkettete Spannung.

Nach Gl. 112 sind die Spannungen der x ten und $(x+1)$ ten Phase

$$p_x = p_m \sin \left[\omega t - (x-1) \frac{2\pi}{n} \right],$$

$$p_{(x+1)} = p_m \sin \left[\omega t - x \frac{2\pi}{n} \right],$$

daher ist die Linienspannung

$$p_l = p_x - p_{(x+1)} = 2 p_m \sin \frac{\pi}{n} \cos \left[\omega t - (2x-1) \frac{\pi}{n} \right].$$

Der Effektivwert P_l der Linienspannung berechnet sich daher aus dem der Phasenspannung P

$$P_l = 2 P \sin \frac{\pi}{n} \dots \dots \dots (113)$$

In dem Vektordiagramm (Fig. 76) sind OP_1 bis OP_n die Phasen-

spannungen eines symmetrischen Fünfphasensystems, P_{12} bis P_{51} die Linienspannungen. P_{12} ist die geometrische Differenz von P_1 und P_2 usw.

Das Polygon der Linienspannungen schließt sich, die Summe der Linienspannungen ist Null.

Dies gilt sowohl für die Effektivwerte von einwelligigen Spannungen als auch für die Momentanwerte beliebiger Spannungen. Denn es ist

$$p_{12} = p_1 - p_2$$

$$p_{23} = p_2 - p_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_{(n-1)n} = p_{(n-1)} - p_n$$

$$p_{n1} = p_n - p_1.$$

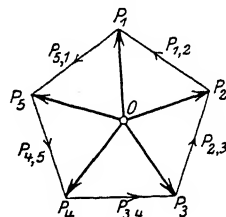


Fig. 76.

Die Summe der linken Seiten ist die Summe aller momentanen Linienspannungen, die Summe der rechten Seiten wird identisch Null.

2. Die Ringschaltung.

Sie entsteht dadurch, daß das Ende einer Spule mit dem Anfang der folgenden verbunden wird, wie Fig. 77 für vier Phasen zeigt. Sind die Phasenspannungen einwellig, so ist ihre Summe bei einem symmetrischen System Null. Im Vektordiagramm ergibt die Summe der Effektivwerte ein geschlossenes Polygon (Fig. 78). In dem geschlossenen Ring fließt daher zunächst kein Strom, sondern erst dann, wenn an die Knotenpunkte Belastungswiderstände angeschlossen werden.

Die Spannung zwischen zwei Leitungen, d. h. die Linienspannung ist hier gleich der Phasenspannung.

Dagegen sind hier zweierlei Ströme zu unterscheiden, die Ring- oder Phasenströme i und die Linienspannungen i_l .

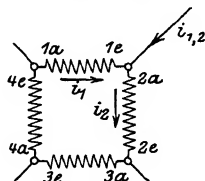


Fig. 77.

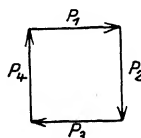


Fig. 78.

Von jedem Knotenpunkt des Ringes geht eine Leitung fort, und es ist in jedem Augenblick die Summe der Ströme, die an einem solchen Knotenpunkt zusammentreffen, gleich Null. Es ist also z. B. für den Knotenpunkt der Phasen 1 und 2 (s. Fig. 77)

$$-i_{12} + i_2 - i_1 = 0,$$

$$i_{12} = i_2 - i_1.$$

Der Liniensstrom ist die Differenz der beiden Phasenströme. Bei symmetrischer Belastung eines symmetrischen Systems ist

$$i_{(x+1)} = i_m \sin \left[\omega t - x \frac{2\pi}{n} \right],$$

$$i = i_m \sin \left[\omega t - (x-1) \frac{2\pi}{n} \right]$$

daher

$$i_l = i_{(x+1)} - i_x = -i_m 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \left[\omega t - (2x-1) \frac{2\pi}{n} \right];$$

daher gilt für die Effektivwerte

$$J_l = 2 J \sin \frac{\pi}{n} \dots \dots \dots (114)$$

Berechnet man hier die Summe aller Linienströme, so kommt darin jeder Phasenstrom einmal mit dem positiven und einmal mit dem negativen Vorzeichen vor, wie auf S. 103 für die Linienspannungen gezeigt war; die Summe wird ebenfalls Null. Beim Ringsystem ist also in jedem Augenblick die Summe aller Linienströme unabhängig von der Kurvenform gleich Null.

42. Balancierte und unbalancierte Mehrphasensysteme.

Die Leistung eines Mehrphasensystems ist gleich der Summe der Leistungen der einzelnen Phasen. Die Leistung eines Wechselstromes pulsiert nach Kap. I S. 10 mit der doppelten Frequenz um den Mittelwert

$$PJ \cos \varphi,$$

der Momentanwert ist

$$PJ [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] = N \left[1 - \frac{\cos (2\omega t - \varphi)}{\cos \varphi} \right].$$

Bei einem symmetrischen und symmetrisch belasteten Mehrphasensystem sei für die x te Phase

$$p_x = \sqrt{2} P \sin \left[\omega t - (x-1) \frac{2\pi}{n} \right],$$

$$i_x = \sqrt{2} J \sin \left[\omega t - (x-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right],$$

$$p_x i_x = PJ \left\{ \cos \varphi - \cos \left[2\omega t - 2(x-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right] \right\}.$$

Bildet man die Summe aller $p_x i_x$ von $x=1$ bis $x=n$, so wird

$$\sum_{x=1}^n \cos \left[2\omega t - 2(x-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right] = 0$$

und

$$\sum_1^n p_x i_x = n PJ \cos \varphi \dots \dots \dots (115)$$

Die momentane Leistung eines gleichmäßig belasteten symmetrischen Mehrphasensystems ist konstant gleich dem n -fachen Mittelwert der Leistung einer Phase.

Je nachdem bei einem Mehrphasensystem die Leistung konstant ist oder nicht, nennt man es ein balanciertes oder ein unbalan-

Symmetrische Systeme sind, wie gezeigt, balanciert, wenn sie gleichmäßig belastet sind; bei ungleichmäßiger Belastung pulsiert die Leistung, das System ist dann unbalanciert. Auch unsymmetrische Systeme können bei gleichmäßiger Belastung balanciert sein, z. B. das Zweiphasen-Dreileitersystem (s. S. 118).

Entsprechend der konstanten Leistung eines balancierten Mehrphasensystems kann bei einem Motor, der mit einem solchen Stromsystem betrieben wird, eine konstante Zugkraft erhalten werden. Bei einem Motor, der mit Einphasenstrom gespeist wird, pulsiert dagegen die Zugkraft ebenso wie die Leistung mit der doppelten Frequenz des Stromes.

Die praktisch wichtigsten Mehrphasensysteme sind das Dreiphasensystem und das Zweiphasen-Dreileitersystem, die nur drei Leitungen benötigen. Sie sollen im folgenden näher besprochen werden.

43. Das Dreiphasensystem.

Das Dreiphasensystem hat drei um 120° gegeneinander phasenverschobene Spannungen, die in Sternschaltung oder Ringschaltung verkettet werden.

Bei der Sternschaltung Fig. 79 ist die Linienspannung nach Gl. 113

$$P_l = 2 P \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} P \quad \dots \dots \dots (116)$$

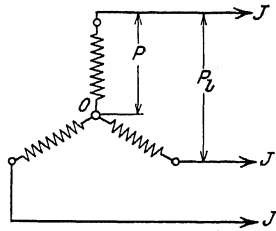


Fig. 79.

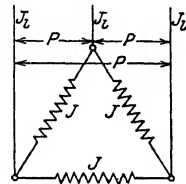


Fig. 80.

Der Linienstrom ist gleich dem Phasenstrom

$$J_l = J \quad \dots \dots \dots (117)$$

Bei gleicher Belastung der drei Phasen ist daher die Leistung

$$N = 3 P J \cos \varphi = \sqrt{3} P_l J_l \cos \varphi \quad \dots \dots \dots (118)$$

In der Ringschaltung (Dreieckschaltung) Fig. 80 ist

$$P_l = P \quad \dots \dots \dots (119)$$

bei gleichmäßiger Belastung nach Gl. 114

$$J_l = 2 J \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} J \quad \dots \dots \dots (120)$$

$$N = 3 P J \cos \varphi = \sqrt{3} P_l J_l \cos \varphi \quad \dots \dots \dots (121)$$

44. Berechnung einer Sternschaltung.

Bei gleicher Belastung der verschiedenen Phasen einer symmetrischen Sternschaltung kann jede Phase wie bei einem Einphasensystem behandelt werden.

Bei Sternschaltung des Stromerzeugers und der Stromverbraucher nach Fig. 81 ist in jeder Phase der Scheinwiderstand $z = \sqrt{R^2 + X^2}$, daher ist der Strom jeder Phase

$$J = \frac{P}{\sqrt{R^2 + X^2}}.$$

Die Leistung einer Phase

$$PJ \cos \varphi = P^2 \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}.$$

Hierbei setzt sich z in jeder Phase zusammen aus den Scheinwiderständen der Belastung z und der Leitung z_l (evtl. einschließlich des Generators).

Trägt man (s. Fig. 82) die drei Phasenspannungen P_1, P_2, P_3 gleich OP_1, OP_2, OP_3 auf, so sind die Linienspannungen am Generator

$P_{12} = P_2 P_1, P_{23} = P_3 P_2, P_{31} = P_1 P_3$. Die drei Phasenströme J_1, J_2, J_3 sind alle um

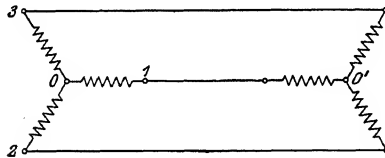


Fig. 81.

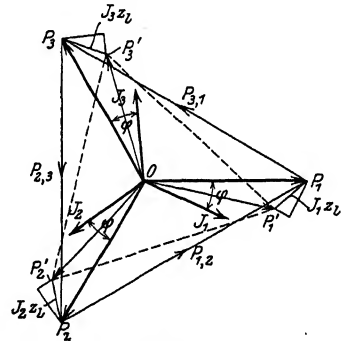


Fig. 82.

denselben Winkel φ gegen ihre Phasenspannungen verzögert und gleichgroß. Subtrahiert man nun von den Phasenspannungen P_1, P_2, P_3 den Spannungsabfall Jz_l in jeder der drei Leitungen, so erhält man OP'_1, OP'_2 und OP'_3 als die drei Phasenspannungen an den Klemmen der Belastung, und das Dreieck der Linienspannungen an den Klemmen der Belastung ist $P'_1 P'_2 P'_3$. Die Seiten des Dreiecks sind gegen $P_1 P_2, P_2 P_3$ und $P_3 P_1$ im gleichen Verhältnis verkleinert und um den gleichen Winkel gedreht wie die Phasenspannungen OP'_1 gegen OP_1 usw. Hieraus folgt, daß bei symmetrischer Belastung das Spannungsdreieck gleichseitig bleibt, und daß der prozentuale Spannungsabfall bezogen auf die Linienspannung gleich ist dem Spannungsabfall einer Phase. Man braucht daher nur den Spannungsabfall wie bei einer Einphasenleitung nach Kap. IV für eine Phase der Sternschaltung zu berechnen.

Ist die Belastung unsymmetrisch, so wird das Spannungsdreieck dagegen verzerrt. Nehmen wir z. B. an, zwei Phasen seien gleich belastet, die dritte aber sei unterbrochen ($z = \infty$), s. Fig. 83. Die Belastungswiderstände der beiden anderen Phasen sind jetzt in Reihe an die Linienspannung angeschlossen, in beiden fließt derselbe Strom, wie bei einem Einphasensystem. Er ist aber jetzt nur noch $\frac{P_1}{2z}$, während er zuvor $\frac{P}{z}$ war, und da $P_1 = \sqrt{3}P$, ist er jetzt

nur $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866$ von dem früheren Wert. Fig. 84 zeigt das Spannungsdiagramm. Die Linienspannung $P_{12} = P_2 P_1$ teilt sich zu gleichen Teilen $P_0 P_2 = P_0 P_1$ auf die beiden in Reihe geschalteten Scheinwiderstände. Zwischen

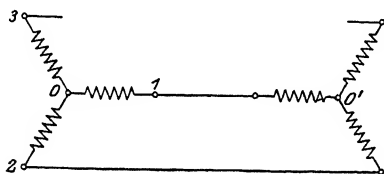


Fig. 83.

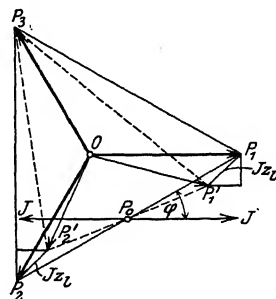


Fig. 84.

dem neutralen Punkt des Generators und dem der Belastung besteht die Spannung OP_0 , und zwischen den Enden der unterbrochenen Leitung besteht die Spannung $P_3 P_0$, die größer ist als die Phasenspannung OP_3 des Generators. Der Strom ist gegen die Linienspannung $P_{12} = P_2 P_1$ um φ verzögert; subtrahiert man den Spannungsabfall Jz_l in den beiden stromführenden Leitungen, so erhält man die Linienspannung $P_2' P_1'$ und das Spannungsdreieck $P_1' P_2' P_3$ an den Klemmen der Belastung, das nun nicht mehr gleichseitig ist. Was hier für vollständige Unterbrechung einer Phase gezeigt wurde, gilt analog, wenn die Belastung einer Phase wesentlich schwächer ist, als die der beiden anderen: an der am schwächsten belasteten Phase tritt eine Erhöhung der Spannung auf, an den anderen eine Verkleinerung.

Infolge dieser gegenseitigen Beeinflussung der Ströme der verschiedenen Phasen ist es im allgemeinen nicht möglich, Glühlampen in Stern zu schalten, weil beim Abschalten einzelner Lampen die Spannungen sich an den übrigen stark ändern. Wenn sie in Stern geschaltet werden, ist ein neutraler Leiter erforderlich.

Analytische Berechnung der Stromverteilung einer Sternschaltung.

Gegeben seien die drei symmetrischen Spannungen des Generators P_1, P_2, P_3 (s. Fig. 85).

Zwischen dem neutralen Punkt des Generators und dem der

Belastung besteht bei ungleicher Belastung der Phasen stets eine Spannung, wie dies soeben für ein Beispiel gezeigt wurde, bei dem kein neutraler Leiter vorhanden war. Ist er vorhanden, so führt er bei ungleicher Belastung der Phasen Strom, und es besteht ein Spannungsabfall in ihm.

Die Größe und Phase dieser Spannung ist zunächst unbekannt, wir bezeichnen sie mit P_0 , sie ist in Fig. 85 durch die Strecke OP_0 dargestellt. Auf jeden Scheinwiderstand, der sich vom neutralen Punkt des Generators über eine Leitung und den Belastungswiderstand bis zum neutralen Punkt der Belastung erstreckt, wirkt die Differenz aus der betreffenden Phasenspannung P_x und der Spannung P_0 . Diese drei Differenzen werden durch die Vektoren P_0P_1 , P_0P_2 , P_0P_3 dargestellt. Sind z_1, z_2, z_3, z_0 die gesamten Scheinwiderstände der drei Phasen

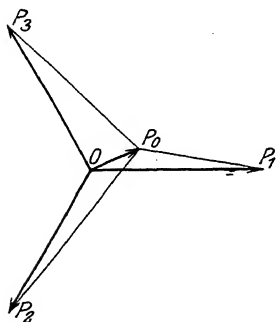


Fig. 85.

und des Nulleiters vom neutralen Punkt des Generators bis zu dem der Belastung, so gelten die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} P_1 - P_0 &= \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{z}_1 \\ P_2 - P_0 &= \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{z}_2 \\ P_3 - P_0 &= \mathfrak{Z}_3 \mathfrak{z}_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (122)$$

und für den Nulleiter

$$0 - P_0 = \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{z}_0.$$

Führt man an Stelle der Scheinwiderstände z die Leitwerte y ein, so ist auch

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= (P_1 - P_0) \eta_1 \\ \mathfrak{Z}_2 &= (P_2 - P_0) \eta_2 \\ \mathfrak{Z}_3 &= (P_3 - P_0) \eta_0 \\ \mathfrak{Z}_0 &= -P_0 \eta_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (122a)$$

Es ist nun die Summe aller vier Ströme gleich Null:

$$\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{Z}_0 = 0.$$

Addiert man daher die vier Gleichungen 122a, so wird

$$P_0 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_0) = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3$$

und hieraus ermittelt sich zunächst

$$P_0 = \frac{\sum P_x \eta_x}{(\sum \eta_x + \eta_0)} \dots \dots \dots (123)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. 122a ergeben sich die vier Ströme.

Ist kein neutraler Leiter vorhanden, so ist in den Gl. 122 und 123 $\eta_0 = 0$ zu setzen.

Graphische Ermittlung. Man kann die soeben abgeleitete Rechnung auch graphisch durchführen. Dividiert man Gl. 123 beiderseits durch \mathfrak{P}_1 , so wird

$$\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_1} = \frac{\sum \mathfrak{P}_x \eta_x}{\mathfrak{P}_1 (\sum \eta_x + \eta_0)} \quad \dots \quad (124)$$

Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion (Fig. 86).

Man trägt

$$OA = \mathfrak{P}_1 \eta_1, \quad OB = \mathfrak{P}_2 \eta_2, \quad OC = \mathfrak{P}_3 \eta_3$$

auf, und bildet die Summe $OD = \sum \mathfrak{P}_x \eta_x$.

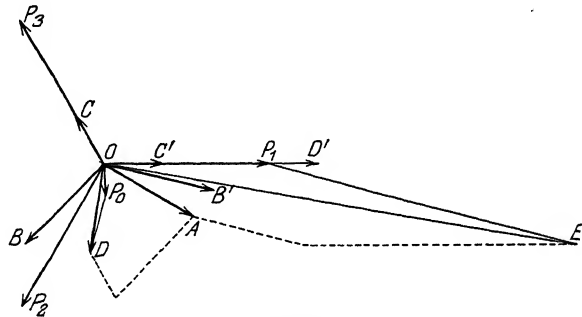


Fig. 86.

Ist ferner

$$OA = \mathfrak{P}_1 \eta_1, \quad OB' = \mathfrak{P}_1 \eta_2, \quad OC' = \mathfrak{P}_1 \eta_3, \quad OD' = \mathfrak{P}_1 \eta_0,$$

so ist die Summe dieser vier Ströme

$$OE = \mathfrak{P}_1 (\sum \eta_x + \eta_0).$$

Nach Gl. 124 verhält sich daher

$$\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_1} = \frac{OD}{OE}.$$

Macht man

$$\triangle OP_0D \sim \triangle OP_1E,$$

so ist OP_0 gleich P_0 nach Größe und Phase.

Eine andere graphische Ermittlung des Sternpunktes ergibt sich aus folgender Betrachtung.

a) Es ist kein Nulleiter vorhanden.

Nimmt man zunächst an, eine Phase, z. B. 3, sei unterbrochen, so sind die beiden anderen 1 und 2 hintereinander an die Linien-spannung P_{12} angeschlossen, und diese verteilt sich auf die beiden Zweige nach Maßgabe ihrer Scheinwiderstände oder im umgekehrten Verhältnis ihrer Leitwerte.

Macht man daher in Fig. 87a und b

$$P_2 P_0' : P_0' P_1 = \mathfrak{z}_2 : \mathfrak{z}_1 = \eta_1 : \eta_2 = OA : AB,$$

so ist OP_0' die Spannung zwischen Sternpunkt des Generators und

dem der Belastung bei unterbrochener Phase 3. Sie ist nach Gl. 123 für $\eta_3 = 0$ und $\eta_0 = 0$,

$$\mathfrak{P}_0' = \frac{\mathfrak{P}_1 \eta_1 + \mathfrak{P}_2 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}.$$

Die Spannung zwischen der Klemme der unterbrochenen Leitung und dem Stern-

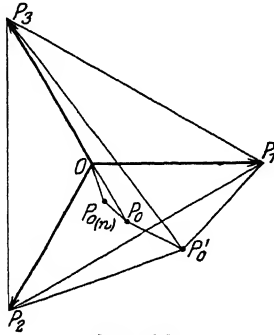


Fig. 87a.

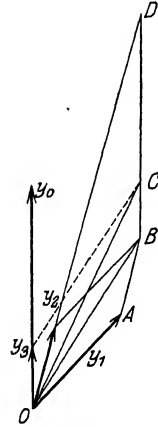


Fig. 87b.

punkt der Belastung ist daher

$$P_3 P_0' = \mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0' = \frac{\mathfrak{P}_3 (\eta_1 + \eta_2) - (\mathfrak{P}_1 \eta_1 + \mathfrak{P}_2 \eta_2)}{\eta_1 + \eta_2} \quad (125)$$

Ist nun der Leitwert der Phase 3 nicht Null sondern η_3 , so ist nach Gl. 123

$$\mathfrak{P}_0 = \frac{\mathfrak{P}_1 \eta_1 + \mathfrak{P}_2 \eta_2 + \mathfrak{P}_3 \eta_3}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}$$

und

$$\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0 = \frac{\mathfrak{P}_3 (\eta_1 + \eta_2) - (\mathfrak{P}_1 \eta_1 + \mathfrak{P}_2 \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)} \quad \dots (125a)$$

Durch Division der Gl. 125 und 125a erhält man daher

$$\frac{\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0'} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}.$$

Man trägt also $P_3 P_0$ so auf, daß

$$P_3 P_0 : P_3 P_0' = (\eta_1 + \eta_2) : (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = OB : OC,$$

dann ist OP_0 die gesuchte Spannung des Sternpunktes.

Haben y_1 und y_2 den gleichen Phasenwinkel, so liegt der Punkt P_0' auf $P_1 P_2$; hat auch y_3 denselben Phasenwinkel wie y_1 und y_2 , so liegt P_0 auf der Geraden $P_3 P_0'$.

b) Ist ein neutraler Leiter vorhanden, so setzt man das Verfahren wie folgt fort. Ohne neutralen Leiter war

$$\mathfrak{P}_0 = \frac{\sum \mathfrak{P}_x \eta_x}{\sum \eta_x},$$

mit neutralem Leiter ist dagegen

$$\mathfrak{P}_{0(n)} = \frac{\sum \mathfrak{P}_x \eta_x}{(\sum \eta_x + \eta_0)}.$$

also

$$\frac{\mathfrak{P}_{0(n)}}{\mathfrak{P}_0} = \frac{\sum \eta_x}{(\sum \eta_x + \eta_0)}.$$

Man trägt also die Strecke $OP_{0(n)}$ so auf, daß

$$OP_{0(n)} : OP_0 = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) : (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = OC : OD,$$

dann ist $OP_{0(n)}$ die gesuchte Spannung des Sternpunktes.

Berechnung bei unsymmetrischen Linienspannungen.

Oft liegt die Aufgabe vor, daß zu gegebenen unsymmetrischen Linienspannungen die Stromverteilung bei Sternschaltung der Belastungswiderstände $z_1 z_2 z_3$ zu berechnen ist (vorausgesetzt, daß die gegebene Unsymmetrie der Spannungen durch sie nicht mehr geändert wird).

In solchen Fällen ist die Bezugnahme auf den Nullpunkt des Stromerzeugers nicht mehr möglich.

Bezeichnet man die Spannungen zwischen je einer der drei Leitungen und einem beliebigen Bezugspunkte der Reihe nach mit $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$, die Linienspannungen $\mathfrak{P}_a \mathfrak{P}_b \mathfrak{P}_c$, so gilt für diese stets (s. auch S. 103)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 &= \mathfrak{P}_c \\ \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3 &= \mathfrak{P}_a \\ \mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_1 &= \mathfrak{P}_b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (126)$$

Die Summe der drei Linienspannungen ist daher stets Null, bei einwilligen Spannungen bilden ihre Vektoren ein geschlossenes Dreieck, das bei Unsymmetrie ungleichseitig ist.

a) Die Belastungswiderstände sind gleich.

Wir wählen als Bezugspunkt den Sternpunkt der Belastungswiderstände, dann sind $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$ die gesuchten Phasenspannungen der Belastung. Da die Summe der drei Ströme der Sternschaltung stets Null ist, wird für $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_3 = \mathfrak{z}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{z}} + \frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{z}} + \frac{\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{z}} &= 0, \\ \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß bei gleichen Belastungswiderständen der Spannungsmittelpunkt der Belastung der Schwerpunkt des Spannungsdreiecks ist (s. Fig. 88). Nach Gl. 126 wird nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \mathfrak{P}_c + \mathfrak{P}_2 \\ \mathfrak{P}_2 &= -\mathfrak{P}_b + \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{P}_3 &= \mathfrak{P}_1, \end{aligned}$$

mithin

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{3}(\mathfrak{P}_c - \mathfrak{P}_b)$$

und analog

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{1}{3}(\mathfrak{P}_a - \mathfrak{P}_c)$$

$$\mathfrak{P}_3 = \frac{1}{3}(\mathfrak{P}_b - \mathfrak{P}_a).$$

Durch die \mathfrak{P} und \mathfrak{z} sind die Ströme bestimmt.

b) Die Belastungswiderstände sind ungleich.

Der Spannungsmittelpunkt der Belastung (O in Fig. 89) ist nicht mehr der Schwerpunkt des Spannungsdreiecks (O'), zwischen den Spannungsmittelpunkten des unsymmetrisch und des symmetrisch

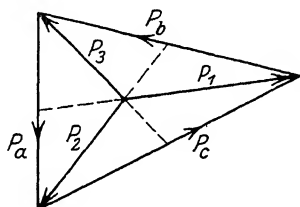


Fig. 88.

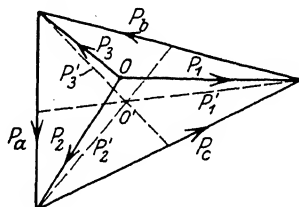


Fig. 89.

belasteten Systems besteht eine Spannung $P_0 = O'O$. Seien P_1, P_2, P_3 die gesuchten Phasenspannungen des unsymmetrisch belasteten Systems, P_1', P_2', P_3' , die bei symmetrischer Belastung, so ist

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_1' - \mathfrak{P}_1$$

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_2' - \mathfrak{P}_2$$

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_3' - \mathfrak{P}_3.$$

Multipliziert man jede der drei Gleichungen mit dem zugehörigen Leitwert $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ und addiert sie, so wird, da die Summe der drei Ströme $\mathfrak{P}_1 \eta_1, \mathfrak{P}_2 \eta_2, \mathfrak{P}_3 \eta_3$ Null ist,

$$\mathfrak{P}_0 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = \mathfrak{P}_1' \eta_1 + \mathfrak{P}_2' \eta_2 + \mathfrak{P}_3' \eta_3$$

$$\mathfrak{P}_0 = \frac{\mathfrak{P}_1' \eta_1 + \mathfrak{P}_2' \eta_2 + \mathfrak{P}_3' \eta_3}{\Sigma \eta} \dots \dots (127)$$

Diese Gleichung für P_0 ist vollkommen analog der Gl. 123, S. 108, mit dem Unterschied, daß die $\mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2' \mathfrak{P}_3'$ hier unter sich verschieden sind. Die graphische Berechnung ist der dort gezeigten genau entsprechend.

45. Dreieckschaltung. Die Beziehung der Phasenströme zu den Linienströmen.

Ehe wir die analytische Berechnung der Dreieckschaltung durchführen, soll zunächst an den Vektordiagrammen die Beziehung zwischen den Phasenströmen und den Linienströmen erläutert werden. Hierbei nehmen wir eine Schaltung nach Fig. 90

Stern geschaltet. Wir legen vorerst, gleichviel ob die Belastungen des Dreiecks gleich sind oder nicht, gleichgroße Linienspannungen zugrunde.

Es seien in Fig. 91 P_1, P_2, P_3 die Phasenspannungen des Generators, die Linienspannungen P_a, P_b, P_c .

P_a, P_b, P_c sind die Phasenspannungen des Dreiecks.

Bei gleicher Belastung der drei Seiten des Dreiecks sind die gleichgroßen Phasenströme (Ringströme) J_a, J_b, J_c um gleiche Winkel φ gegen die Spannungen P_a, P_b, P_c verzögert.

Verlegt man die Vektoren der Ströme nach dem Mittelpunkt O , so erhält man die Linienströme als

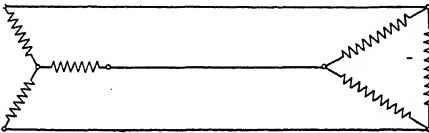


Fig. 90.

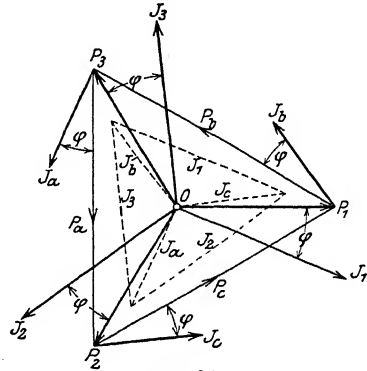


Fig. 91.

Differenzen benachbarter Phasenströme, also

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_c - i_b \\ i_2 &= i_a - i_c \\ i_3 &= i_b - i_a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (128)$$

Die Vektoren dieser Ströme sind die Seiten des Stromdreiecks. Ihre Verschiebung nach dem Nullpunkt zeigt, daß sie gegen die Spannungen P_1, P_2, P_3 dieselbe Phasenverschiebung haben, die zwischen den Spannungen und den Strömen des Dreiecks besteht.

Anders ist es bei ungleicher Belastung der Dreieckseiten. Ein Beispiel hierfür zeigt Fig. 92. Es sind die Phasenverschiebungen der Dreieckströme gegen ihre Spannungen $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$, die der Leitungsströme gegen ihre Spannungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Es ergeben sich folgende Beziehungen: J_1 ist gegen P_1 um φ_1 verzögert. Nach Gl. 128 ist J_1 die geometrische Differenz von J_c und J_b , die um φ_c bzw. φ_b gegen P_c bzw. P_b nacheilen. P_c eilt

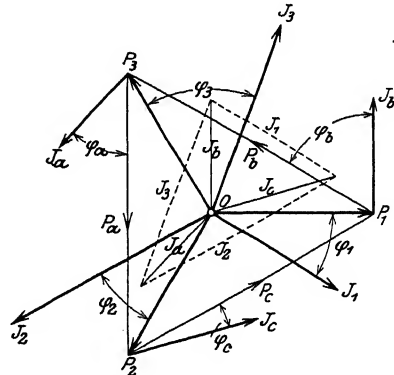


Fig. 92.

gegen P_1 um 30° vor, während P_b gegen P_1 um 150° voreilt, $-P_b$ also gegen P_1 um 30° nacheilt, daher wird

$$\begin{aligned} J_1 \cos \varphi_1 &= J_c \cos(\varphi_c - 30^\circ) + J_b \cos(\varphi_b + 30^\circ) \\ J_1 \sin \varphi_1 &= J_c \sin(\varphi_c - 30^\circ) + J_b \sin(\varphi_b + 30^\circ) \end{aligned}$$

und analog für die anderen Phasen

$$\begin{aligned} J_2 \cos \varphi_2 &= J_a \cos(\varphi_a - 30^\circ) + J_c \cos(\varphi_c + 30^\circ) \\ J_2 \sin \varphi_2 &= J_a \sin(\varphi_a - 30^\circ) + J_c \sin(\varphi_c + 30^\circ) \end{aligned}$$

endlich

$$\begin{aligned} J_3 \cos \varphi_3 &= J_b \cos(\varphi_b - 30^\circ) + J_a \cos(\varphi_a + 30^\circ) \\ J_3 \sin \varphi_3 &= J_b \sin(\varphi_b - 30^\circ) + J_a \sin(\varphi_a + 30^\circ) \end{aligned}$$

Ändert sich der Strom in einer Seite des Dreiecks, so ändern sich nur die Linienströme an den beiden benachbarten Eckpunkten, aber nicht der des gegenüberliegenden Eckpunktes. Wird z. B. der Strom einer Seite Null, etwa der Seite a , so ist $J_2 = -J_c$ und $J_3 = J_b$, J_1 ist aber nicht Null, weil die Phasenverschiebungen der Ströme J_2 und J_3 gegen ihre Spannungen mit der Phasenverschiebung der Belastung nicht einfach zusammenhängen.

Sind etwa zwei Seiten gleichstark und induktionsfrei belastet die dritte unbelastet, also $J_a = 0$, $J_b = J_c = J$, $\varphi_b = \varphi_c = 0$, so wird

$$\begin{aligned} J_1 \cos \varphi_1 &= J \cos(-30^\circ) + J \cos 30^\circ = J\sqrt{3} \\ J_1 \sin \varphi_1 &= J \sin(-30^\circ) + J \sin 30^\circ = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} J_1 \cos \varphi_1 \\ J_1 \sin \varphi_1 \end{aligned}} \right\} J_1 = J\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} J_2 \cos \varphi_2 &= J \cos 30^\circ = \frac{J\sqrt{3}}{2} \\ J_2 \sin \varphi_2 &= J \sin 30^\circ = \frac{J}{2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} J_2 \cos \varphi_2 \\ J_2 \sin \varphi_2 \end{aligned}} \right\} J_2 = J$$

$$\begin{aligned} J_3 \cos \varphi_3 &= J \cos(-30^\circ) = \frac{J\sqrt{3}}{2} \\ J_3 \sin \varphi_3 &= J \sin(-30^\circ) = -\frac{J}{2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} J_3 \cos \varphi_3 \\ J_3 \sin \varphi_3 \end{aligned}} \right\} J_3 = J.$$

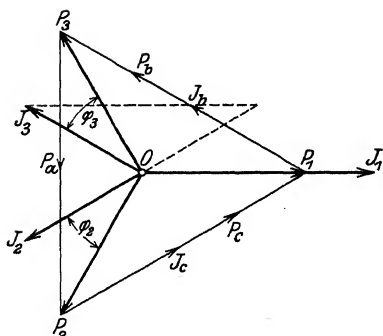


Fig. 93.

Es ist also J_1 in Phase mit P_1 , dagegen ist J_2 gegen P_2 um 30° verzögert, während J_3 gegen P_3 um 30° voreilt (s. Fig. 93). Die in jeder der beiden belasteten Phasen verbrauchte Leistung ist $J P_i = \sqrt{3} P J$, insgesamt also $2 \sqrt{3} P J$. Hier von führt J_1 die Hälfte, die übrigen Ströme je ein Viertel zu.

Sind dagegen bei einer unbelasteten Phase die beiden anderen induktiv und etwa wieder gleich-

rk belastet, also

$$J_a = 0, \quad J_b = J_c = J, \quad \varphi_b = \varphi_c = 90^\circ,$$

ist

$$J_1 \cos \varphi_1 = 0; \quad J_1 \sin \varphi_1 = \sqrt{3} J$$

$$J_2 \cos \varphi_2 = -\frac{J}{2}, \quad J_2 \sin \varphi_2 = \frac{J}{2} \sqrt{3}$$

$$J_3 \cos \varphi_3 = \frac{J}{2}, \quad J_3 \sin \varphi_3 = \frac{J}{2} \sqrt{3}.$$

Hier führt also J_3 eine Leistung $P_3 J_3 \cos \varphi_3 = \frac{1}{2} PJ$ zu, während dieselbe Leistung wieder zurückgibt, und die gesamte Leistung ist Null (Fig. 94).

Ein Linienstrom wird bei der Dreieckschaltung Null, wenn die Ströme in beiden benachbarten Dreieckseiten gleich groß und von gleicher Phase sind. Ihre Phasenverschiebungen gegen Spannungen unterscheiden sich um 120° . Ist z. B. J_b gegen P_b 30° verzögert, während J_c gegen P_c um 90° voreilt, so ist, wenn sie gleich groß sind, ihre Differenz, d. h.

Linienstrom $J_1 = 0$.

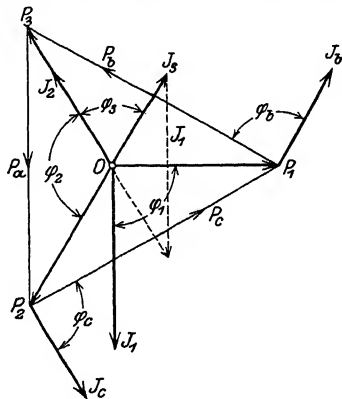


Fig. 94.

Transfigurierung einer Dreieckschaltung in eine Sternschaltung.

Ist bei unsymmetrischer Belastung der Dreieckschaltung der Spannungsabfall in der Leitung zu berücksichtigen, so wird die Lösung der Gleichungen, die drei unbekannte Spannungen und drei bekannte Ströme enthalten, dadurch besonders unübersichtlich, daß Linienströme jeweils die Differenz zweier Phasenströme sind.

Wesentliche Vereinfachung der Berechnung bietet die Anwendung des zuerst von A. E. Kennelly bewiesenen Satzes, daß eine Dreieckschaltung durch eine in bezug auf den äußeren Strom äquivalente Sternschaltung ersetzt werden kann. Durch diese Transfigurierung wird die Berechnung einer Dreieckschaltung auf die einer Sternschaltung zurückgeführt.

Es seien die Scheinwiderstände z_b, z_c des Dreiecks gegeben (s. Fig. 95), gesucht z_1, z_2, z_3 für den äquivalenten Stern. Äquivalenz besteht,

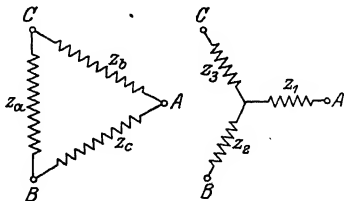


Fig. 95.

bei beiden Schaltungen gleichgroß ist. Zwischen den Klemmen AB liegen beim Stern z_1 und z_2 in Reihe, beim Dreieck dagegen parallel zu der Reihenschaltung von z_a und z_b , daher ist

$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = \frac{\dot{z}_c(\dot{z}_a + \dot{z}_b)}{\dot{z}_a + \dot{z}_b + \dot{z}_c},$$

ebenso

$$\dot{z}_2 + \dot{z}_3 = \frac{\dot{z}_a(\dot{z}_b + \dot{z}_c)}{\dot{z}_a + \dot{z}_b + \dot{z}_c},$$

$$\dot{z}_3 + \dot{z}_1 = \frac{\dot{z}_b(\dot{z}_c + \dot{z}_a)}{\dot{z}_a + \dot{z}_b + \dot{z}_c}.$$

Addiert man jeweils zwei dieser Gleichungen und subtrahiert davon die dritte, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\dot{z}_b \dot{z}_c}{\dot{z}_a + \dot{z}_b + \dot{z}_c} \\ \dot{z}_2 &= \frac{\dot{z}_c \dot{z}_a}{\dot{z}_a + \dot{z}_b + \dot{z}_c} \\ \dot{z}_3 &= \frac{\dot{z}_a \dot{z}_b}{\dot{z}_a + \dot{z}_b + \dot{z}_c} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (129)$$

Sind die Scheinwiderstände des Dreiecks unter sich gleich

$$\dot{z}_a = \dot{z}_b = \dot{z}_c = \dot{z},$$

so sind auch die des Sterns gleichgroß, und zwar ist

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \frac{\dot{z}}{3}.$$

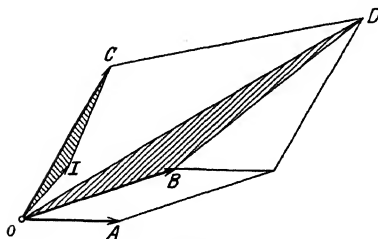


Fig. 96.

Man kann die Transfigurierung auch graphisch ausführen. Stell in Abb. 96 die Vektoren OA , OB , OC der Reihe nach \dot{z}_a , \dot{z}_b , \dot{z}_c nach Größe und Phase dar, und ist O ihre Summe, so macht man

$$\triangle OIC \sim \triangle OBD,$$

daher

$$OI = \frac{OC \cdot OB}{OD} = \frac{\dot{z}_c \dot{z}_b}{\dot{z}_a + \dot{z}_b + \dot{z}_c} =$$

und analog für die anderen Phasen.

Umgekehrt kann eine Sternschaltung in eine Dreieckschaltung transfiguriert werden; man verwendet hierbei zweckmäßig die Leertwerte. Die Äquivalenz der Schaltungen gilt unabhängig von den Spannungen, die an ihnen bestehen. Ist z. B. die Spannung zwischen den beiden Klemmen A und B (Fig. 95) gleich Null, so können diese Punkte widerstandslos verbunden werden. Man hat dann bei dem Dreieck zwischen diesen beiden Klemmen und der dritten eine Parallelschaltung von y_a und y_b , beim Stern eine Reihenschaltung

von y_3 mit den beiden parallelgeschalteten y_1 und y_2 . Es wird daher

$$\eta_a + \eta_b = \frac{1}{\frac{1}{\eta_3} + \frac{1}{\eta_1 + \eta_2}} = \frac{\eta_3 (\eta_1 + \eta_2)}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3},$$

analog

$$\eta_b + \eta_c = \frac{\eta_1 (\eta_2 + \eta_3)}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3},$$

$$\eta_c + \eta_a = \frac{\eta_2 (\eta_3 + \eta_1)}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3},$$

und indem man wieder zwei Gleichungen addiert und davon die dritte subtrahiert

$$\left. \begin{aligned} \eta_a &= \frac{\eta_2 \eta_3}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} \\ \eta_b &= \frac{\eta_3 \eta_1}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} \\ \eta_c &= \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (129 a)$$

Diese Rechnung findet z. B. dann Anwendung, wenn mehrere unsymmetrische Sternschaltungen parallelgeschaltet sind, deren neutrale Punkte nicht verbunden sind und der Spannungsabfall für beide zu berücksichtigen ist. Zwischen den neutralen Punkten besteht eine Spannung, es können daher die Scheinwiderstände entsprechender Stromkreise nicht parallelgeschaltet werden.

Man transfiguriert dann erst jede Sternschaltung in ein Dreieck, die entsprechenden Seiten der Dreiecke sind parallelgeschaltet. Das aus der Parallelschaltung resultierende Dreieck kann wieder in eine Sternschaltung transfiguriert werden, womit die den parallelgeschalteten Sternschaltungen äquivalente Sternschaltung gefunden ist.

47. Berechnung der Spannungserhöhung bei einem Mehrphasensystem.

In Kap. IV S. 44 wurde gezeigt, wie bei einer Einphasenleitung die prozentuale Spannungserhöhung und damit der ihr nahezu gleichgroße Spannungsabfall berechnet wird. Da bei einem Mehrphasensystem die Linienspannung von dem Spannungsabfall zweier Linienströme beeinflusst wird, die bei ungleicher Belastung der Phasen sehr verschieden groß sein und ungleiche Phasenverschiebungen gegen ihre Spannungen haben können, erweitert sich diese Berechnung bei-

In Fig. 97 sind die Linienspannungen P_a, P_b, P_c der Lastung in beliebigem Maßstab aufgetragen.

J_a, J_b, J_c seien die Ströme der in Dreieck geschalteten Lastung. Aus ihnen erhält man die Linienströme J_1, J_2, J_3 geometrische Differenzen nach Gl. 128.

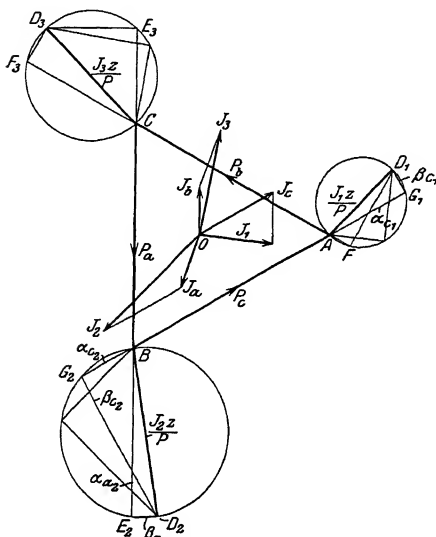


Fig. 97.

Man trägt nun die Spannungsabfälle in der Leitung $\frac{Jz}{P} 100$ in Prozenten der sekundären Spannung (Sternspannung) unter dem Winkel $\arctg \frac{X}{R}$ gegen

J voreilend auf und beschreiben über diesen Strecken als Durchmesser je einen Kreis. So z. B.

$$AD_1 = \frac{J_1 z}{P} 100, BD_2 = \frac{J_2 z}{P} 100$$

Die Verlängerung von P_c schneidet die Kreise über AD_1 und

BD_2 in G_1 und G_2 .

Die Strecken AG_1 und G_1D_1 seien in Prozenten der sekundären Spannung, α_{c1} und β_{c1} , ebenso $BG_2 = \alpha_{c2}$, $G_2D_2 = \beta_{c2}$, so unter Berücksichtigung von Gl. 54 S. 44

$$\varepsilon_c^0 / 0 = \pm \alpha_{c1} \pm \alpha_{c2} + \frac{(\beta_{c1} \pm \beta_{c2})^2}{200}$$

und analog für die anderen Phasen. Hierbei erhalten die α positive oder negative Vorzeichen, je nachdem sie in die Verlängerung des Vektors der Linienspannung fallen oder in ihn selbst. Die β sind zu addieren oder zu subtrahieren, je nachdem sie einander entgegen- oder gleichgerichtet sind.

48. Das Zweiphasen-Dreileitersystem.

Dieses System hat zwei um 90° gegeneinander phasenverschobene Spannungen und einen Nullleiter, es ist also ein unsymmetrisches System.

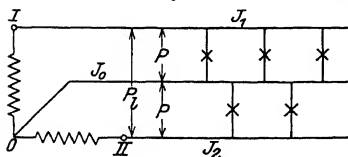


Fig. 98.

Die Belastung wird zwischen einem Außenleiter und den Nullleitern angeschlossen (s. Fig. 98).

Bei gleichmäßiger Belastung ist die Summe der momentanen Leistungen beider Phasen konstant, das System ist balanciert. Die Leistung ist

$$N = 2PJ \cos \varphi.$$

Die Linienspannung ist

$$P_l = P\sqrt{2},$$

der Strom des Nulleiters

$$J_0 = J\sqrt{2},$$

daher auch

$$N = P_l J_0 \cos \varphi.$$

Ist der Spannungsabfall im Nulleiter vernachlässigbar klein, so bleiben bei gleicher Belastung der Phasen die Spannungen an den Klemmen der Belastung gleich groß und um 90° gegeneinander phasenverschoben. Besteht dagegen im Nulleiter ein Spannungsabfall, der gleich OP_0 in Fig. 99 ist, so sind die Spannungen an der Belastung $P_0P'_1$ und $P_0P'_2$ auch bei gleichen Strömen verschieden und nicht mehr um 90° phasenverschoben.

Die Berechnung ergibt sich genau wie auf S. 108 für 3 Phasen. Sind y_1, y_2, y_0 die Leitwerte, gerechnet vom neutralen Punkt des Generators bis zu dem der Belastung, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_0 &= \frac{\mathfrak{P}_1 y_1 + \mathfrak{P}_2 y_2}{y_1 + y_2 + y_0} \\ \mathfrak{S}_1 &= (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_0) y_1 \\ \mathfrak{S}_2 &= (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0) y_2 \\ \mathfrak{S}_0 &= -\mathfrak{P}_0 y_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (130)$$

Man kann hier ebenfalls graphisch verfahren.

Denkt man sich zunächst eine Phase, z. B. 2 unterbrochen, so teilt sich die Spannung P_1 auf den Nulleiter und die Belastung der Phase 1 nach Maßgabe der Scheinwiderstände. Es ist

$$\mathfrak{P}'_0 = \frac{\mathfrak{P}_1}{1 + \frac{y_0}{y_1}} = \mathfrak{P}_1 \frac{y_0}{y_1 + y_0}.$$

Sind sowohl die Belastung als auch der Nulleiter induktions-

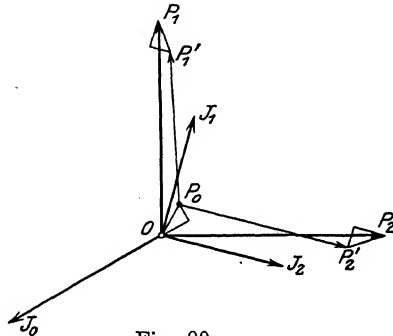


Fig. 99.

frei, so braucht man, wie in Fig. 100, nur den Vektor OP_1 in OP'_0 und P'_0P_1 so zu teilen, daß

$$OP'_0 : P'_0P_1 = R_0 : R_1.$$

Zwischen der Klemme der unterbrochenen Phase und dem Nullpunkt der Belastung besteht dann die Spannung P'_0P_2 , sie ist im allgemeinen Fall

$$\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}'_0 = \frac{\mathfrak{P}_2(\eta_1 + \eta_0) - \mathfrak{P}_1\eta_1}{\eta_1 + \eta_0}.$$

Ist dagegen die Phase 2 belastet, so ergibt sich P_0 aus Gl. 130 und es wird

$$\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0 = \frac{\mathfrak{P}_2(\eta_1 + \eta_0) - \mathfrak{P}_1\eta_1}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_0},$$

also verhält sich

$$\frac{\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}'_0} = \frac{\eta_1 + \eta_0}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_0} = \frac{1 + \frac{\mathfrak{z}_0}{\mathfrak{z}_1}}{1 + \frac{\mathfrak{z}_0}{\mathfrak{z}_1} + \frac{\mathfrak{z}_0}{\mathfrak{z}_2}}.$$

Nehmen wir z. B. an, es sei auch Phase 2 induktionsfrei belastet und ebenso wie 1, d. h. $R_1 = R_2 = R$, so wird

$$\frac{\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}'_0} = \frac{R + R_0}{R + 2R_0}.$$

Man teilt in Fig. 100 $P_2P'_0$ so durch den Punkt P_0 , daß

$$P_2P_0 : P_0P'_0 = R + R_0 : R + 2R_0.$$

Die Verdrehung der Spannungsvektoren aus der 90° Phasenlage durch den Einfluß des Nullleiters ist für den Betrieb von Motoren besonders ungünstig. Dies ist der Grund, weshalb das System jetzt seltener angewendet wird.

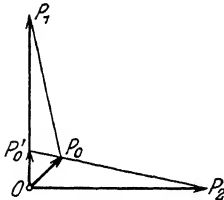


Fig. 100.

49. Zerlegung eines unsymmetrischen Mehrphasensystems in zwei symmetrische.

Wie bei gegebenen unsymmetrischen Spannungen für konstante Belastungswiderstände zu rechnen ist, wurde auf S. 111 gezeigt. Diese Rechnung ist aber nicht mehr verwendbar, wenn die Belastung aus rotierenden Maschinen besteht (z. B. Induktionsmotoren). Ohne auf die Theorie der Maschinen hier eingehen zu können, sei jedoch ein Hilfssatz¹⁾ erläutert, der in solchen Fällen zum Ziel führt. Er lautet: Ein unsymmetrisches Mehrphasensystem läßt sich in zwei symmetrische mit entgegengesetzter Phasenfolge der Spannungen zer-

¹⁾ s. Fortescue Proc. Am. Inst. El. Eng. 1918. P. Müller ETZ 1918. H. 35.

legen. Die beiden symmetrischen Teilsysteme sind verschieden groß, das größere hat die Phasenfolge des unzerlegten unsymmetrischen Systems, das kleinere die entgegengesetzte.

Zur Erläuterung ist in Fig. 101 zunächst die Zusammensetzung zweier symmetrischer Dreiphasensysteme zu einem unsymmetrischen gezeigt. In dem großen gleichseitigen Spannungsdreieck $A'B'C$ eilt P_b' gegen P_a' um 120° nach, P_c' gegen P_a' um 120° vor. In dem kleinen gleichseitigen Spannungsdreieck $A'DA$ eilt dagegen $P_b'' = A'A$ gegen $P_a'' = A'D$ um 120° vor, $P_c'' = DA$ gegen P_a'' um 120° nach. Durch Parallelverschieben von $P_a'' = A'D$ nach $B'B$ ergibt sich $CB = P_a$ als geometrische Summe von P_a' und P_a'' . Da $BD = B'A' = P_c'$, ist $BA = P_c$ die Summe von P_c' und P_c'' , endlich $AC = P_b$ die Summe von P_b' und P_b'' .

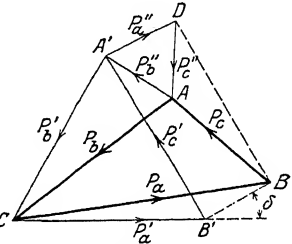


Fig. 101.

In dem resultierenden unsymmetrischen Spannungsdreieck ABC ist die Phasenfolge dieselbe wie in $A'B'C$.

Die beiden symmetrischen Teilsysteme sind durch zwei zusammenzusetzende Spannungsvektoren und deren Phasenverschiebung bestimmt. In Fig. 101 eilt z. B. $P_a'' = B'B$ gegen P_a' um δ vor. Beziehen wir alle Spannungsvektoren auf P_a' und P_a'' und geben einem, z. B. P_a' , die Phase Null, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_a' &= P_a' & \mathfrak{P}_a'' &= P_a'' e^{j\delta} \\ \mathfrak{P}_b' &= P_a' e^{-j\frac{2\pi}{3}} & \mathfrak{P}_b'' &= P_a'' e^{j(\delta + \frac{2\pi}{3})} \\ \mathfrak{P}_c' &= P_a' e^{+j\frac{2\pi}{3}} & \mathfrak{P}_c'' &= P_a'' e^{j(\delta - \frac{2\pi}{3})} \end{aligned}$$

Durch Addition entsprechender Vektoren folgt:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_a &= \mathfrak{P}_a' + \mathfrak{P}_a'' = P_a' + P_a'' e^{j\delta} \\ \mathfrak{P}_b &= \mathfrak{P}_b' + \mathfrak{P}_b'' = P_a' e^{-j\frac{2\pi}{3}} + P_a'' e^{j(\delta + \frac{2\pi}{3})} \\ \mathfrak{P}_c &= \mathfrak{P}_c' + \mathfrak{P}_c'' = P_a' e^{+j\frac{2\pi}{3}} + P_a'' e^{j(\delta - \frac{2\pi}{3})} \end{aligned} \right\} . \quad (131)$$

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit $e^{+j\frac{2\pi}{3}}$, die dritte mit $e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ und addiert sie zur ersten, so ist

$$\mathfrak{P}_a + \mathfrak{P}_b e^{j\frac{2\pi}{3}} + \mathfrak{P}_c e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 3P_a' = 3\mathfrak{P}_a' (132)$$

Multipliziert man hingegen die zweite Gleichung mit $e^{-j\frac{2\pi}{3}}$, die dritte mit $e^{+j\frac{2\pi}{3}}$ und addiert sie zur ersten, so ist

$$\mathfrak{P}_a + \mathfrak{P}_b e^{-j\frac{2\pi}{3}} + \mathfrak{P}_c e^{+j\frac{2\pi}{3}} = 3P_a'' e^{j\delta} = 3\mathfrak{P}_a'' \quad (133)$$

Die beiden letzten Gleichungen geben die Regeln an, wie ein gegebenes unsymmetrisches Spannungsdreieck $P_a P_b P_c$ in zwei symmetrische zu zerlegen ist. Die graphische Zerlegung wird danach wie folgt ausgeführt:

1. Man verdreht um die Endpunkte eines Spannungsvektors (P_a) die beiden anliegenden und zwar den in der Phase zurückliegenden (P_b) um 120° nach vorwärts, den voreilenden (P_c) um 120° nach rückwärts. Die Verbindungslinie der freien Endpunkte der gedrehten Vektoren ist die dreifache Länge des zum festliegenden Vektor (P_a) zugehörigen Vektors (P_a') des gleichsinnigen symmetrischen Teilsystems.

2. Man verdreht um die gleichen Endpunkte des festliegenden Spannungsvektors (P_a) den in der Phase zurückliegenden (P_b) um 120° nach rückwärts, den voreilenden (P_c) um 120° nach vorwärts.

Die Verbindungslinie der freien Endpunkte der gedrehten Vektoren ist die dreifache Länge des zum festliegenden Vektor (P_a) zugehörigen Vektors (P_a'') des symmetrischen Teilsystems mit umgekehrter Phasenfolge. Fig. 102 zeigt die graphische Zerlegung.

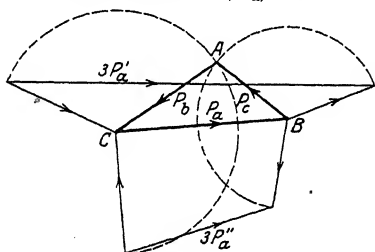


Fig. 102.

Für ein Zweiphasensystem ist die Ableitung ganz analog und braucht hier nicht durchgeführt zu werden.

Ein Sonderfall ergibt sich bei Zusammensetzung von zwei gleichgroßen symmetrischen Spannungsdreiecken mit entgegengesetzter Phasenfolge.

Setzt man in Gl. 131 $P_a'' = P_a'$ und $\delta = 0$, so wird $P_a = 2P_a'$, $P_b = -P_a'$, $P_c = -P_a'$. Dies ist ein Einphasensystem mit der Spannung $2P_a'$. Danach läßt sich ein Einphasensystem zerlegen in zwei gleichgroße symmetrische Dreiphasensysteme mit entgegengesetzter Phasenfolge von je halber Spannung.

50. Mehrwellige Ströme in Mehrphasensystemen.

Die Spannungskurven der verschiedenen Phasen eines symmetrischen Mehrphasensystems haben alle dieselbe Form, da die verschiedenen Wicklungen einer Mehrphasenmaschine alle dieselben elektrischen und magnetischen Eigenschaften besitzen. Die Oberschwingungen kommen in den Kurven aller Phasen in gleicher Größe und Lage gegenüber der Grundwelle vor.

Der Phasenwinkel der Grundwelle überträgt sich auf die Ober-

Sind die Grundwellen zweier aufeinanderfolgender Spannungen um $\frac{2\pi}{n}$ gegeneinander phasenverschoben, so sind die Oberwellen der κ -fachen Frequenz um $\frac{\kappa 2\pi}{n}$ ihrer Wellenlänge gegeneinander phasenverschoben.

Ist $\kappa:n$ eine ganze Zahl, so ist die Phasenverschiebung dieser Oberwellen ein ganzes Vielfaches von 2π , d. h. die Oberwellen sind gleichphasig.

Ist $\kappa = (xn - 1)$, worin x eine ganze Zahl ist, so ist die Phasenverschiebung dieser Oberwellen zweier aufeinanderfolgender Spannungen

$$\frac{\kappa 2\pi}{n} = x 2\pi - \frac{2\pi}{n}.$$

Die Oberwellen bilden ein symmetrisches Mehrphasensystem mit vertauschter Reihenfolge der Phasen.

Ist endlich $\kappa = (xn + 1)$, so ist

$$\frac{\kappa 2\pi}{n} = x 2\pi + \frac{2\pi}{n}.$$

Die Reihenfolge der Phasen ist wieder dieselbe, wie für die Grundwellen.

Bei einem Dreiphasensystem ist für alle Werte von κ , die durch 3 teilbar sind, $\kappa:n$ eine ganze Zahl, die dritten, neunten, fünfzehnten usw. Oberwellen sind in allen drei Spannungen stets gleichgerichtet. Für $x = 2, 4, \dots$ wird

$$(xn - 1) = 5, 11, 17 \dots$$

$$(xn + 1) = 7, 13, 19 \dots$$

Die Oberwellen der ersten Reihe bilden symmetrische Mehrphasensysteme mit vertauschter Reihenfolge der Phasen, die der zweiten Reihe solcher mit gleicher Reihenfolge wie bei den Grundwellen.

Die Linienspannung ist bei Sternschaltung des Generators die Differenz zweier aufeinanderfolgender Phasenspannungen.

Bei der Bildung der Differenz fallen die gleichphasigen Oberwellen fort, beim Dreiphasensystem also alle Oberwellen, deren Ordnung κ durch 3 teilbar ist, die dritten, neunten usw. Für die fünften, siebenten, elften usw. Oberwellen ist wie für die Grundwellen

die verkettete Spannung $2 \sin \frac{\pi}{n} = \sqrt{3}$ mal so groß wie die unverkettete Spannung.

Die Spannungskurve der verketteten Spannung eines Generators mit Sternschaltung hat daher eine ganz andere Kurvenform als die Kurve der unverketteten Spannung. Fig. 103 zeigt die Phasenspannung und die Linienspannung eines Generators.

Das Verhältnis der Effektivwerte der Linienspannung und der Phasenspannung ist

$$\frac{P_l}{P} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{P_1^2 + P_5^2 + P_7^2 + \dots}}{\sqrt{P_1^2 + P_3^2 + P_5^2}}.$$

Kommen Oberwellen von 3, 9, ... facher Periodenzahl in der Phasenspannung vor, so ist dieses Verhältnis kleiner als $\sqrt{3}$.

Durch die Sonderstellung, die die dritten Oberwellen beim Dreiphasensystem einnehmen, sind eine Anzahl von praktisch wichtigen Erscheinungen zu erklären. Da die dritten Oberwellen stets gleichgerichtet sind, können sie bei einem Generator mit Sternschaltung ohne Nulleiter nicht zur Wirkung kommen, da sie, wie gezeigt, in der Linienspannung fortfallen. Sind die Stromverbraucher ebenfalls

in Stern geschaltet, so besteht zwischen dem Nullpunkt des Generators und dem der Belastung auch bei vollständiger Symmetrie eine Spannung von 3facher Periodenzahl (und den evtl. darüber gelagerten Oberwellen von 9facher usw. Periodenzahl), die gleich der Summe dieser in den 3 Phasen gleichgerichteten Wellen ist.

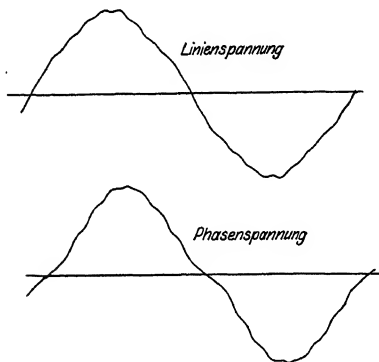


Fig 103.

Ist der neutrale Punkt des Generators geerdet, der der Belastung nicht, so besteht zwischen diesem und Erde die Spannung

der dritten Oberwellen, die bei Hochspannungsgeneratoren groß werden kann, so daß die Berührung des Nullpunktes gefährlich wird. Man erdet mitunter auch den Nullpunkt der Transformatoren. In den Erdleitern oder in einem gegebenenfalls vorhandenen Nulleiter fließt stets ein Strom von 3facher usw. Periodenzahl, der Nulleiter ist auch bei gleicher Belastung der Phasen nicht mehr stromlos. Man erdet über Drosselpulen oder über Widerstände.

Bei Dreieckschaltung des Generators addieren sich die dritten Oberwellen der Spannung zu einer Resultierenden von dreifacher Amplitude und ergeben einen Ausgleichstrom, der fast unabhängig von der Belastung ist. Die Wicklung ist, auch wenn keine äußere Belastung angeschlossen ist, nicht stromlos. Öffnet man das Dreieck, so kann die Spannung der Oberwellen für sich gemessen werden.

Die inneren Ströme von dreifacher Periodenzahl bedingen zusätzliche Verluste in der Wicklung und erhöhte Erwärmung, man schaltet daher Dreiphasengeneratoren selten in Dreieck.

51. Messung der Leistung von Mehrphasenströmen.

Bei gleicher Belastung aller Phasen eines symmetrischen Mehrphasensystems genügt es, die Leistung einer Phase zu messen und sie mit der Phasenzahl zu multiplizieren. Fig. 104 zeigt die Schaltung für eine Dreiphasensternschaltung. Die Stromspule des Wattmeters ist in eine Leitung geschaltet, die Spannungsspule zwischen diese Leitung und den Sternpunkt. Ebenso kann man bei einer Dreieckschaltung die Stromspule in eine Dreiecksseite und die Spannungsspule zwischen die zugehörigen Knotenpunkte des Dreiecks schalten. Oft verwendet man einen künstlichen Nullpunkt (s. Fig. 105) und gleicht die Widerstände so ab, daß der Widerstand der Spannungsspule mit ihrem Vorschaltwiderstand ebenso groß ist wie die Widerstände der beiden anderen Zweige.

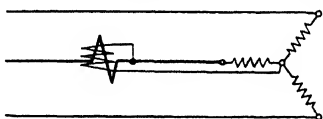


Fig. 104.

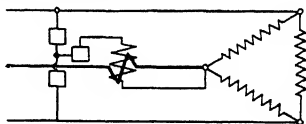


Fig. 105.

Bei ungleicher Belastung brauchen allgemein nur $(m-1)$ Leistungsmesser verwendet zu werden, wenn m die Zahl der Leitungen ist.

Bei einem Dreiphasensystem ohne Nulleiter genügen also 2 Leistungsmesser. Es ist

$$\sum p_i = p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3$$

und

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

daher auch

$$\sum p_i = (p_1 - p_3) i_1 + (p_2 - p_3) i_2 \quad \dots \quad (134)$$

Bei dieser Leistungsmessung, die von Aron und von Behn-Eschenburg angegeben ist, werden nach Fig. 106 die beiden Stromspulen in je eine

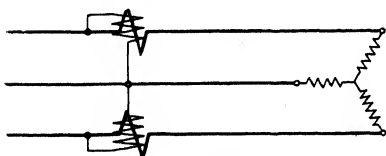


Fig. 106.

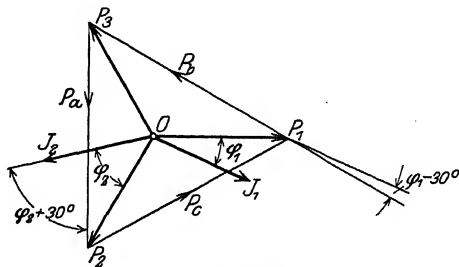


Fig. 107.

Leitung geschaltet und die Spannungsspulen zwischen diese Leitung und die dritte. Gl. 134 gilt für die Momentanwerte also ganz unabhängig von der Kurvenform.

Für die Effektivwerte einwelliger Ströme gilt das Vektordiagramm Fig. 107 dieser Schaltung.

J_1 und J_2 sind die gemessenen Ströme, die um φ_1 bzw. φ_2 gegen P_1 und P_2 verzögert seien. Die gemessenen Linienspannungen sind $-P_b$ als Differenz von P_1 und P_3 und P_a als Differenz von P_2 und P_3 . Es eilt nun $-P_b$ gegen J_1 um $(30^\circ - \varphi_1)$ nach, und P_a gegen J_2 um $(\varphi_2 + 30^\circ)$ vor. Daher zeigen die Leistungsmesser folgende Leistungen an:

$$N_I = -P_b J_1 \cos(\varphi_1 - 30^\circ), \quad N_{II} = P_a J_2 \cos(\varphi_2 + 30^\circ),$$

worin $P_a = P_b = \sqrt{3} P$ ist.

Ist $\varphi_2 = 60^\circ$, so zeigt der zweite Leistungsmesser die Leistung Null an, sein Ausschlag kehrt sich um, wenn φ_2 größer als 60° wird.

Bei gleicher Belastung aller Phasen ist

$$\begin{aligned} N_I + N_{II} &= \sqrt{3} PJ [\cos(\varphi - 30^\circ) + \cos(\varphi + 30^\circ)] \\ &= 3 PJ \cos \varphi, \end{aligned}$$

die Differenz der Leistungen ist dagegen

$$\begin{aligned} N_I - N_{II} &= \sqrt{3} PJ 2 \sin \varphi \sin 30^\circ \\ &= \sqrt{3} PJ \sin \varphi. \end{aligned}$$

Durch Division der beiden Gleichungen wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{N_I - N_{II}}{N_I + N_{II}} \dots \dots \dots (135)$$

Bei gleicher Belastung kann die Phasenverschiebung bei einwelligen Strömen direkt aus den Ausschlägen der Leistungsmesser ohne Strom und Spannungsmesser nach Gl. 135 berechnet werden.

Bei gleicher Belastung der drei Phasen genügt nach R. Friesse ein Leistungsmesser, mit dem zwei Messungen auszuführen sind. Die Stromspule bleibt bei beiden Messungen in derselben Leitung, die Spannungsspule wird nacheinander zwischen diese Leitung und die beiden anderen geschaltet. Die beiden gemessenen Leistungen sind, wenn die Stromspule z. B. J_1 mißt:

$$N_I = (-P_b) J_1 \cos(\varphi_1 - 30^\circ), \quad N_{II} = P_c J_1 \cos(\varphi_1 + 30^\circ),$$

woraus man für gleiche Belastung und symmetrische Spannungen wieder die soeben abgeleiteten Beziehungen erhält.

Dreiphasensystem mit Nulleiter¹⁾. Hier sind drei Leistungsmesser erforderlich. Es ist

$$\Sigma p_i = p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3 + p_0 i_0$$

und

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_0 = 0.$$

Setzt man i_0 aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so erhält man

$$\Sigma p_i = (p_1 - p_0) i_1 + (p_2 - p_0) i_2 + (p_3 - p_0) i_3 \quad (135)$$

¹⁾ s. Orlich, ETZ 1907, S. 71.

Hierin sind $(p_1 - p_0)$, $(p_2 - p_0)$, $(p_3 - p_0)$ die Spannungen der Außenleiter gegen den Nulleiter, die zur Abkürzung mit p_{10} , p_{20} , p_{30} bezeichnet werden mögen, so daß wir erhalten

$$\Sigma p i = p_{10} i_1 + p_{20} i_2 + p_{30} i_3 \dots (135a)$$

Die meisten Zählerkonstruktionen für Dreiphasensysteme mit Nulleiter verwenden die Linienspannungen. Diese erhalten wir durch die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} p_a &= p_{20} - p_{30} \\ p_b &= p_{30} - p_{10} \\ p_c &= p_{10} - p_{20} \end{aligned} \right\} \dots (136)$$

Die Summe $p_{10} + p_{20} + p_{30}$ ist bei Verwendung eines Nulleiters von Null verschieden und zwar nicht nur bei unsymmetrischer Belastung sondern auch bei symmetrischer Belastung, weil die Oberwellen von 3, 9, ... facher Periodenzahl fließen können. Setzt man

$$p_{10} + p_{20} + p_{30} = \Sigma p \dots (137)$$

so erhält man aus Gl. 136 und 137

$$\left. \begin{aligned} p_{10} &= \frac{1}{3}(p_c - p_b + \Sigma p) \\ p_{20} &= \frac{1}{3}(p_a - p_c + \Sigma p) \\ p_{30} &= \frac{1}{3}(p_b - p_a + \Sigma p) \end{aligned} \right\} \dots (138)$$

Setzt man in die Leistungsgleichung 135a

$$i_1 = -(i_2 + i_3 + i_0),$$

so wird

$$\Sigma p i = (p_{20} - p_{10}) i_2 + (p_{30} - p_{10}) i_3 - p_{10} i_0$$

oder, wenn man die Linienspannungen nach Gl. 136 einführt,

$$\Sigma p i = p_b i_3 - p_c i_2 - p_{10} i_0 \dots (139)$$

Diese Gleichung, die durch zyklische Vertauschung zwei weitere analoge ergibt, bietet noch keine Vorteile gegenüber der Messung nach Gl. 135, weil 3 Zählersysteme erforderlich sind, bei denen je eine Spannungsspule und eine Stromspule zusammenwirken.

Die Zahl der Systeme läßt sich aber auf 2 reduzieren, wenn man bei jedem System mehrere Spannungsspulen oder auch mehrere Stromspulen zusammenwirken läßt. Dies ergibt die folgenden Möglichkeiten.

Setzt man in Gl. 139 für p_{10} den Wert aus Gl. 138 ein, so wird

$$\Sigma p i = p_b (i_3 + \frac{1}{3} i_0) - p_c (i_2 + \frac{1}{3} i_0) - \frac{1}{3} i_0 \Sigma p \dots (140)$$

Addiert und subtrahiert man hierzu $p_c i_3$, so erhält man

$$\Sigma p i = (p_b - p_c) (i_3 + \frac{1}{3} i_0) + p_c (i_3 - i_2) - \frac{1}{3} i_0 \Sigma p \dots (141)$$

Addiert man zu Gl. 139 die durch zyklische Vertauschung erhaltene

$$\Sigma p i = p_c i_1 - p_a i_3 - p_{20} i_0$$

und setzt für p_{10} und p_{20} die Werte aus Gl. 138 ein, so ergibt sich

$$2 \Sigma p i = (p_b - p_a)(i_3 - \frac{1}{3} i_0) + p_c(i_1 - i_2) - \frac{2}{3} i_0 \Sigma p. \quad (142)$$

Setzt man ferner die Werte aus Gl. 138 in Gl. 135a ein, so wird

$$3 \Sigma p i = i_1(p_c - p_b) + i_2(p_a - p_c) + i_3(p_b - p_a) - i_0 \Sigma p,$$

oder nach Addition und Subtraktion von $i_3 p_c$

$$3 \Sigma p i = (i_1 - i_3)(p_c - p_b) + (i_2 - i_3)(p_a - p_c) - i_0 \Sigma p. \quad (143)$$

Die Gl. 140—143 stellen, wenn man von dem Glied mit Σp absieht, Meßanordnungen mit 2 Systemen dar, bei denen je 1 oder 2 Spannungsspulen mit 2 Stromspulen zusammenwirken.

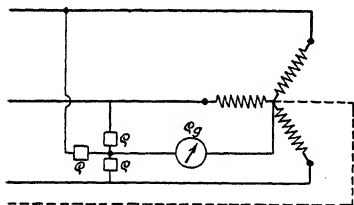


Fig. 108.

Das Glied mit Σp gibt den Fehler an. Man kann Σp messen, wenn man (nach Fig. 108) durch drei gleiche Widerstände ϱ zwischen den Außenleitern einen künstlichen Nullpunkt herstellt und ihn durch einen Spannungsmesser vom Widerstand ϱ_g mit dem Nullpunkt der Belastung verbindet.

Sind j_1, j_2, j_3 die Ströme in den 3 Widerständen, j der Strom im Spannungsmesser, so ist

$$p_{10} = j_1 \varrho + j \varrho_g$$

$$p_{20} = j_2 \varrho + j \varrho_g$$

$$p_{30} = j_3 \varrho + j \varrho_g,$$

daher

$$\Sigma p = (\varrho + 3 \varrho_g) j.$$

Der Ausschlag des Spannungsmessers ist daher mit $\frac{\varrho + 3 \varrho_g}{\varrho_g}$ zu multiplizieren, um die Spannung Σp zu erhalten.

Schaltet man in gleicher Weise die Spannungsspule eines Leistungsmessers, dessen Stromspule von i_0 durchflossen ist, so kann das Fehlerglied in Gl. 140—143 gemessen werden.

Neuntes Kapitel.

Stromkreise mit gegenseitiger Induktion.

52. Gegenseitige Induktion zweier Stromkreise. — 53. Streuung. — 54. Der Lufttransformator. — 55. Stromkreise mit induktiv verketteten Systemen. — 56. Gegenseitige Induktion mehrphasiger Stromkreise. — 57. Die Stromverteilung in massiven Leitern.

52. Gegenseitige Induktion zweier Stromkreise.

Liegen zwei geschlossene Stromkreise einander benachbart, wie Fig. 109 für zwei einfache Leiterschleifen zeigt, so ist der Induktionsfluß des einen auch teilweise mit dem anderen verkettet. Die Änderung des Stromes eines Kreises bedingt Induktionswirkungen nicht nur in ihm selbst, sondern auch im benachbarten Stromkreis, eine Erscheinung, die als gegenseitige Induktion bezeichnet wird.

Führen beide Kreise Strom, so stellt sich ein Feld ein, das aus der Summenwirkung beider Ströme resultiert.

Die magnetische Energie des Feldes zweier stromführender Kreise.

Die Energie des magnetischen Feldes ist nach Gl. 16 S. 12

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mu_0 \mu \mathfrak{H}^2 dv \dots \dots \dots (16)$$

In einem beliebigen Punkt seien die von den Strömen i_1 und i_2 der beiden Kreise herrührenden Feldstärken \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 . Sie haben im allgemeinen verschiedene Richtung und mögen einen Winkel α miteinander bilden. Dann ist die resultierende Feldstärke

$$\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H}_1^2 + \mathfrak{H}_2^2 + 2 \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 \cos \alpha.$$

Mit diesem Wert zerfällt der Ausdruck 16 für die Energie in drei Teile

$$W_{m_1} = \frac{1}{2} \int \mu \mu_0 \mathfrak{H}_1^2 dv \text{ ist nur von } i_1,$$

$$W_{m_2} = \frac{1}{2} \int \mu \mu_0 \mathfrak{H}_2^2 dv \text{ ist nur von } i_2,$$

$$W = \int \mu \mu_0 \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 \cos \alpha dv \text{ ist von } i_1 \text{ und } i_2 \text{ abhängig}$$

Nach S. 12 ist

$$W_{m_1} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2, \quad W_{m_2} = \frac{1}{2} L_2 i_2^2,$$

worin L_1 und L_2 die Induktivitäten der beiden Stromkreise sind. Den dritten Teil können wir wie folgt deuten. Die vom Strom i_1 herrührenden und von ihm durchflossenen Induktionsröhren sind (s. Fig. 109) zum Teil mit i_2 verkettet. Für eine solche Röhre ist der konstante Fluß

$$\mu_0 \mu \mathfrak{S}_1 df = \mathfrak{B}_1 df.$$

Daher wird für eine solche Röhre

$$dW_{m_{12}} = \mathfrak{B}_1 df \int_0 \mathfrak{S}_2 \cos \alpha ds.$$

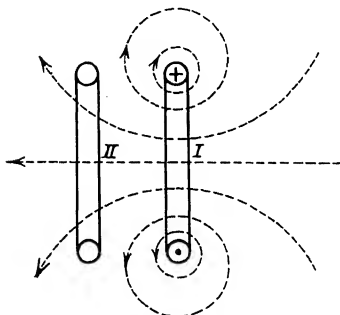


Fig. 109.

Nach dem Durchflutungsgesetz ist hierin

$$\int_0 \mathfrak{S}_2 \cos \alpha ds = i_2,$$

sofern diese Röhre i_2 umschlingt, andernfalls Null. Im ersten Fall ist

$$dW_{m_{12}} = \mathfrak{B}_1 df i_2.$$

Erstreckt man daher die Integration nur über die Röhren, die mit i_2 verkettet sind, so wird

$$W_{m_{12}} = i_2 \int \mathfrak{B}_1 df = i_2 \Psi_{12},$$

worin Ψ_{12} der Induktionsfluß ist, den der Strom i_1 durch die Fläche des Stromkreises 2 sendet. Man setzt

$$\Psi_{12} = i_1 M_{12} \quad \dots \quad (144)$$

$$W_{m_{12}} = i_1 i_2 M_{12} \quad \dots \quad (145)$$

Geht man vom Strom i_2 aus, so findet man analog den Fluß, den i_2 durch den Stromkreis 1 sendet,

$$\Psi_{21} = i_2 M_{21} \quad \dots \quad (144a)$$

$$W_{m_{12}} = i_1 i_2 M_{21} \quad \dots \quad (145a)$$

Da die Energie in beiden Fällen dieselbe ist, wird

$$M_{12} = M_{21} = M \quad \dots \quad (146)$$

M heißt der gegenseitige Induktionskoeffizient oder die Wechselinduktivität der beiden Stromkreise, $W_{m_{12}} = i_1 i_2 M$ die wechselseitige magnetische Energie. Die gesamte magnetische Energie zweier stromführender Kreise ist daher

$$W_m = \frac{1}{2} i_1^2 L_1 + i_1 i_2 M + \frac{1}{2} i_2^2 L_2 \quad \dots \quad (147)$$

Sie setzt sich zusammen aus den Eigenenergien der Felder jedes Stromkreises ($\frac{1}{2} i_1^2 L_1$ und $\frac{1}{2} i_2^2 L_2$), die ebenso groß sind, wie wenn der andere nicht vorhanden wäre, und der wechselseitigen Energie $i_1 i_2 M$.

M hat, wie aus der Ableitung folgt, dieselbe Dimension wie L und wird in Henry gemessen. M ist auch nur als Konstante zu betrachten, wenn die Permeabilität des Mediums μ unabhängig von der Induktion ist.

M kann das positive oder negative Vorzeichen haben. Ordnen sich die Umlaufrichtung des Stromes eines Stromkreises und die Richtung des vom anderen Stromkreis durch ihn gesandten Flusses entsprechend einem Rechtssystem zu, so ist M positiv, sonst negativ.

EMK der gegenseitigen Induktion.

Ändern sich die Ströme i_1 und i_2 , so ändert sich die Energie des Feldes. Betrachten wir L_1 , L_2 und M als Konstante, sehen wir somit von einer Veränderung der gegenseitigen Lage und von einer Deformation der beiden Systeme ab, die eine Änderung von M bzw. L bedingen würden, so kann die Zu- oder Abnahme der Energie nur dadurch zustande kommen, daß elektrische Leistung den Stromkreisen zugeführt oder von ihnen abgegeben wird. Sie ist stets gleich dem Produkt aus dem Strom und einer Spannung. Nimmt die Energie in der Zeit dt um dW_m zu, so ist die den Stromkreisen zugeführte Leistung

$$\frac{dW_m}{dt} = i_1 \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right) + i_2 \left(M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right).$$

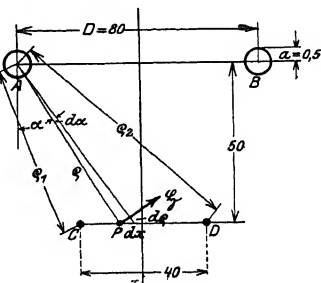
Die in den Klammern stehenden Ausdrücke, mit denen die Ströme multipliziert werden, sind die zugeführten Spannungen, die den durch die Änderung des Flusses bedingten EMKs entgegengesetzt gleich sind.

Zu der EMK der Selbstinduktion $-L \frac{di}{dt}$ tritt in jedem Strom-

kreis die EMK der gegenseitigen Induktion $-M \frac{di}{dt}$, die im

Stromkreis 1 von der Änderung des Stromes i_2 und umgekehrt herrührt. Für einen einwelligen Strom ist der Effektivwert von $M \frac{di}{dt}$ gleich $J \omega M$ und symbolisch durch $j \mathfrak{Z} \omega M$ dargestellt.

Beispiel. Auf einem Leitungsmast seien zwei Doppelleitungen befestigt (s. Fig. 110), die eine $A-B$ mag eine Kraftleitung, die andere CD eine Telephonleitung sein. Es soll die gegenseitige



Fließt durch den Leiter A der Strom 1 Amp., so ist die Feldstärke in einem Punkt P der Ebene durch CD

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2\pi\varrho},$$

sie ist, da die Kraftlinien Kreise um A sind, senkrecht zur Verbindungslinie AP gerichtet, ihre Komponente senkrecht zur Ebene CD ist daher

$$\mathfrak{H} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{2\pi\varrho}.$$

Der Fluß durch ein Flächenelement von der Länge 1 cm und der Breite dx ist

$$d\Psi = \mu_0 \mathfrak{H} \sin \alpha dx = \frac{2 \sin \alpha}{\varrho} dx \cdot 10^{-9}.$$

Der Verschiebung des Punktes P um dx entspricht eine Vergrößerung von ϱ auf $\varrho + d\varrho$ und von α auf $\alpha + d\alpha$. Dabei ist

$$dx \sin \alpha = d\varrho,$$

daher

$$d\Psi = \frac{2 d\varrho}{\varrho} 10^{-9}.$$

Der ganze Fluß durch die Längeneinheit der von den Leitern CD begrenzten Ebene wird somit für 1 Amp.

$$2 \ln \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right) 10^{-9}$$

Einen ebenso großen Fluß erzeugt der Strom 1 Amp. im Leiter B . Die Wechselinduktivität wird somit für die Länge l cm

$$M = 4l \cdot \ln \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right) 10^{-9} \text{ Henry} \quad (148)$$

Mit den in Abb. 110 eingeschriebenen Maßen wird

$$\varrho_2 = 78, \quad \varrho_1 = 54, \quad M = 4 \cdot l \ln \frac{78}{54} 10^{-9} = 1,47 \cdot l \cdot 10^{-9} \text{ Henry}.$$

Die Induktivität der Doppelleitung AB ist hingegen (s. S. 14)

$$L = 4l \left(\ln \frac{D}{a} + \frac{1}{4} \right) 10^{-9} = 21,3l \cdot 10^{-9} \text{ Henry}.$$

L ist hier fast 15 mal so groß wie M . Laufen die Leitungen auf 10 km = 10^6 cm parallel, so induziert ein einwelliger Strom von 100 Amp. bei 50 Perioden, der in der Hauptleitung fließt, in der anderen eine effektive Spannung

$$J \omega M = 100 \cdot 314 \cdot 1,47 \cdot 10^{-3} = 46 \text{ Volt}.$$

Zur Vermeidung der dadurch hervorgerufenen Störungen sind die

53. Streuung.

Der Strom eines Systems J_1 bedingt in ihm selbst eine Anzahl Kraftlinienwindungen $L_1 J_1$, in dem anderen $M J_1$. Sie verhalten sich wie $L_1 : M$. Wären beide Systeme in gleicher Weise mit dem Fluß des Stromes J_1 verkettet, so müßten sich bei zwei Spulen die Kraftlinienwindungen wie die Windungszahlen w_1 und w_2 verhalten, es wäre

$$L_1 : M = w_1 : w_2,$$

analog

$$L_2 : M = w_2 : w_1,$$

somit

$$L_1 L_2 = M^2.$$

Da die Systeme räumlich nicht zusammenliegen, ist von dem Fluß des einen Stromkreises nur ein Teil mit dem anderen verkettet. Man bezeichnet dies als Streuung.

Es wird daher stets

$$L_1 L_2 > M^2 \quad (149)$$

Als Maß für die Streuung setzt man

$$1 - \frac{L_1 L_2}{M^2} = \sigma, \quad (150)$$

worin $\sigma > 0$ ist und als Streukoeffizient bezeichnet wird.

Nur der wechselseitigen magnetischen Energie $J_1 J_2 M$ entspricht eine Energieübertragung von einem Stromkreis auf den anderen. Bei Maschinen und anderen Apparaten ist es daher zweckmäßig, sich den gesamten Fluß zerlegt zu denken in einen beiden Stromkreisen gemeinsamen, den Hauptfluß, und die sog. Streuflüsse.

Nun ist aber von den beiden Stromkreisen gemeinsamen Kraftlinien allgemein nur ein Teil mit allen Windungen beider Stromkreise verkettet, der Rest nur mit einem Teil, und zwar je nach der räumlichen Anordnung der Spulen mit verschiedenen Teilen von beiden. Die Zerlegung in Haupt- und Streukraftlinien ist daher in vielen Fällen nicht eindeutig und kann in verschiedener Weise vorgenommen werden¹⁾.

1. Zum Hauptfluß sind zunächst die Kraftlinien zu zählen, die mit allen Windungen beider Stromkreise verkettet sind. Ihre Durchflutung ist

$$J_1 w_1 + J_2 w_2.$$

Definiert man nun nach Rogowski²⁾ als Hauptfluß die Summe der Kraftlinien, die verschwindet, wenn

$$J_1 w_1 + J_2 w_2 = 0$$

gemacht wird, den Rest als Streuflüsse, so ergibt sich, daß der Haupt-

¹⁾ s. F. Emde, Elektrotechnik und Maschinenbau, 1914, S. 238.

fluß alle Kraftlinien umfaßt, die hierbei von gleich viel Amperedrähten beider Stromkreise durchflutet sind.

Die gemeinsamen Kraftlinien, die von ungleichen Amperedrähten der beiden Stromkreise durchflutet sind, zählen dann zu den Streuflüssen. Sie heißen nach Rogowski doppeltverkettete Streuflüsse im Gegensatz zu den reinen (oder einfach verketteten) Streuflüssen, die nur mit je einem Stromkreise verkettet sind.

Die Kraftlinienwindungen der beiden Stromkreise sind allgemein

$$\Psi_1 = J_1 L_1 + J_2 M,$$

$$\Psi_2 = J_2 L_2 + J_1 M.$$

Macht man

$$J_2 w_2 = -J_1 w_1,$$

so bleiben als Kraftlinienwindungen der Streuflüsse

$$\left. \begin{aligned} J_1 \left(L_1 - \frac{w_1}{w_2} M \right) &= J_1 S_1, \\ J_2 \left(L_2 - \frac{w_2}{w_1} M \right) &= J_2 S_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (151)$$

$$S_1 = L_1 - \frac{w_1}{w_2} M \quad \text{und} \quad S_2 = L_2 - \frac{w_2}{w_1} M \quad \dots \dots (152)$$

sind die Streuinduktivitäten der beiden Stromkreise. Sie können beide positiv sein, es kann aber auch einer Null oder negativ werden. Bei dieser Zerlegung werden somit die Anteile der beiden Stromkreise an der gesamten Streuung verschieden groß.

2. Die Ungleichheit, die an sich willkürlich erscheinen muß, verschwindet, wenn man die Zerlegung so vornimmt, daß die gesamten magnetischen Energien beider Stromkreise gleich groß werden. Man hat somit zu setzen:

$$\frac{1}{2} (L_1 J_1^2 + J_1 J_2 M) = \frac{1}{2} (L_2 J_2^2 + J_1 J_2 M).$$

Da hierin die wechselseitige Energie zu gleichen Teilen in jedem Stromkreis vorkommt, werden die Eigenenergien gleichgesetzt. Hauptfluß wird die Summe der Kraftlinien definiert, die verschwindet, wenn

$$J_2 = -J_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

gemacht wird. Hiermit sind die Kraftlinienwindungen der Streuflüsse

$$J_1 \left(L_1 - M \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \right) = J_1 L_1 \left(1 - \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \right) = J_1 S_1,$$

$$J_2 \left(L_2 - M \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right) = J_2 L_2 \left(1 - \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \right) = J_2 S_2.$$

Die so definierten Streuinduktivitäten S_1 und S_2 sind wegen Gl. 1 stets positiv.

Diese zweite Zerlegung hat ihrerseits den Nachteil, daß oft ein Teil der mit allen Windungen beider Stromkreise verketteten Induktionslinien zu den Streuflüssen gezählt wird. Diese Linien verschwinden, wenn $J_2 w_2 = -J_1 w_1$ gemacht wird. Dies würde bei der hier zugrunde gelegten Bedingung nur zutreffen, wenn

$$L_1 : L_2 = w_1^2 : w_2^2$$

ist. In diesem Fall decken sich beide Definitionen, er ist aber im allgemeinen nicht erfüllt.

Für die gesamte Streuung $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$ ist die Art der Zerlegung natürlich belanglos.

Weitere oft verwendete Bezeichnungen sind

$$L_1 = v_1 M \frac{w_1}{w_2}, \quad L_2 = v_2 M \frac{w_2}{w_1},$$

worin $v_1 v_2$ die Hopkinsonschen Streukoeffizienten heißen. Damit wird Gl. 150

$$\sigma = 1 - \frac{1}{v_1 v_2}.$$

Das Verhältnis $\frac{M^2}{L_1 L_2}$ wird als Kopplungsfaktor bezeichnet.

54. Der Lufttransformator.

Ein Transformator dient zur Umsetzung von elektrischer Energie einer Spannung in solche einer anderen. Er besitzt zwei Spulen, die sich gegenseitig induzieren und die ruhend zueinander angeordnet sind. Bei den niederen Frequenzen der Starkstromtechnik werden die Spulen zur Erzielung starker magnetischer Felder auf Eisenkerne gewickelt; in der Hochfrequenztechnik werden keine magnetischen Materialien verwendet. In diesem Falle sind L und M konstant. Wir beginnen mit dem Lufttransformator. In dem Schema

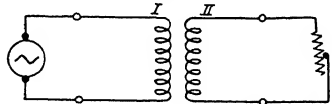


Fig. 111.

Fig. 111 sind die beiden Spulen mit 1 und 2 bezeichnet. Die eine (1) ist an eine Wechselspannung angeschlossen, sie heißt kurz die primäre Spule oder die Primärwicklung, die andere (2) wird als sekundäre bezeichnet, sie ist über einen Belastungswiderstand irgendwelcher Art geschlossen. Sind i_1 und i_2 die Ströme, R_1 , R_2 die Widerstände, L_1 , L_2 die Induktivitäten der beiden Stromkreise, M die Wechselinduktivität, so gelten für die beiden Stromkreise die Gleichungen

$$p_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \dots \quad (153)$$

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad \dots \quad (154)$$

Man sieht aus der zweiten Gleichung, daß, wenn der eine Strom sich nach einer Sinusfunktion ändert, bei konstanten Werten von L , M und R auch der andere einwellig ist. Man kann daher die Gleichungen symbolisch schreiben

$$\mathfrak{P}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \mathfrak{S}_1 + j\omega M \mathfrak{S}_2 \quad (153)$$

$$0 = (R_2 + j\omega L_2) \mathfrak{S}_2 + j\omega M \mathfrak{S}_1 \quad (154)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt das Verhältnis der Ströme unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung δ ; es ist

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2} = - \frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} = - \frac{L_2}{M} + j \frac{R_2}{\omega M}, \quad . . (155)$$

daher das Verhältnis der Effektivwerte

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}}{\omega M}, \quad (156)$$

$$\operatorname{tg} \delta = - \frac{R_2}{\omega L_2}.$$

Da $\operatorname{tg} \delta$ negativ ist, liegt δ zwischen 90° und 180° . Setzt man den Wert für \mathfrak{S}_2 aus Gl. 155 in Gl. 153a ein, so wird

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{S}_1 [R_1 + R_2 A^2 + j\omega (L_1 - L_2 A^2)], \quad . . (157)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$A^2 = \frac{(\omega M)^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2} = \left(\frac{J_2}{J_1} \right)^2 \quad (158)$$

Der sekundäre Stromkreis wirkt also so auf den primären zurück, als ob sein Widerstand um $R_2 A^2$ vergrößert und seine Induktivität um $L_2 A^2$ verkleinert wäre. Die Phasenverschiebung zwischen primärer Spannung und Strom ist nach Gl. 157

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega (L_1 - L_2 A^2)}{R_1 + R_2 A^2} \quad (159)$$

Die Wirkspannung ist

$$P_1 \cos \varphi_1 = J_1 (R_1 + R_2 A^2), \quad (160)$$

die zugeführte Leistung

$$N_1 = P_1 J_1 \cos \varphi_1 = J_1^2 (R_1 + R_2 A^2)$$

und nach Gl. 156a

$$N_1 = J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 \quad (161)$$

Der primäre Strom entnimmt dem Netz eine Leistung, von der ein Teil in dem Stromkreis als Stromwärme verbraucht wird ($J_1^2 R_1$), der andere Teil wird in dem sekundären Stromkreis in Stromwärme umgesetzt, sie wird von dem primären Stromkreis auf den sekundären durch das gemeinsame magnetische Wechselfeld als Zwischenglied übertragen.

Vektordiagramm. Die Gleichungen ermöglichen, für jede Belastung des sekundären Kreises ($R_2 L_2$) die Ströme und ihre Phase für eine gegebene primäre Klemmenspannung zu berechnen. Übersichtliche wird der Zusammenhang der verschiedenen Größen wieder durch das Vektordiagramm. Bevor wir dieses aufzeichnen, ist folgendes zu berücksichtigen. Die EMKe $J_1 \omega M$ und $J_1 \omega L_1$, von denen die erste im sekundären, die zweite im primären Stromkreis induziert wird, verhalten sich nach S. 135 wie

$$M : L_1 = w_2 : w_1 v_1,$$

also abgesehen vom Streufaktor v_1 wie die Windungszahlen w_2 und w_1 . Diese sind im allgemeinen sehr verschieden groß, da der Zweck des Transformators ja ist, die Spannung umzuformen. Um die primären und sekundären Spannungen direkt miteinander vergleichen zu können, denkt man sich alle sekundären Spannungen mit dem Verhältnis $w_1 : w_2$ multipliziert, d. h. auf die primäre Windungszahl reduziert. Damit die Leistung unverändert bleibt, ist der sekundäre Strom mit dem reziproken Verhältnis, nämlich $w_2 : w_1$ zu multiplizieren. Die Größen R_2 und ωL_2 , die das Verhältnis einer Spannung zum Strom ausdrücken, sind bei der Reduktion mit $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2$ zu multi-

plizieren, dagegen ωM , die das Verhältnis einer sekundären Spannung zum primären Strom, oder einer primären Spannung zum sekundären Strom darstellt, mit $w_1 : w_2$. Durch diese Reduktion ändert sich an den Erscheinungen nichts. Im folgenden werden stets die reduzierten Größen vorausgesetzt.

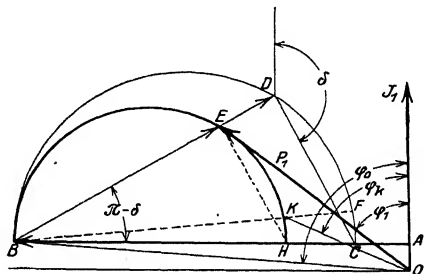


Fig. 112.

In Fig. 112 ist $OA = R_1 J_1$ in Phase mit J_1 und $AB = \omega L J_1$ um 90° dagegen voreilend. Ferner ist $CB = \omega M J_1$, es ist daher

$$AB = CB v_1.$$

Das über CB konstruierte rechtwinklige Dreieck BCD hat nun nach Gl. 154 die Seiten $BD = \omega L_2 J_2$, $DC = J_2 R_2$, J_2 fällt daher in die Richtung DC , und der Winkel zwischen J_1 und J_2 ist der berechnete Winkel δ . Es ist $BE = \omega M J_2$ und daher OE als geometrische Summe von $OA = J_1 R_1$, $AB = \omega L_1 J_1$ und $BE = \omega M J_2$ nach Gl. 153 die primäre Klemmenspannung P_1 , die gegen J_1 um φ_1 voreilt.

Da $CB = \omega M J_1$ und $BE = \omega M J_2$ ist $CB : BE = J_1 : J_2$

Spannungsdiagramm für induktionsfreie Belastung. Das Spannungsdiagramm zeigt, wie die Klemmenspannung zu verändern ist, wenn bei konstantem Strom die Belastung sich ändert. Bei induktionsfreier Belastung ist L_2 lediglich die Induktivität der sekundären Wicklung, und es ist

$$BD:BE = L_2:M = v_2:1.$$

Ändert sich nun R_2 , so ändert sich das rechtwinklige Dreieck BDC , dessen Seiten $BD = J_2 \omega L_2$ und $DC = J_2 R_2$ waren, derart, daß D sich auf dem Halbkreis über CB bewegt. Da nun $BE = \frac{BD}{v_2}$, also BD stets proportional ist, bewegt sich der Punkt E auf dem Kreis über BH , worin

$$BH:BC = BE:BD = 1:v_2$$

ist. Der Endpunkt des Vektors der primären Spannung bei konstantem Strom J_1 bewegt sich also auf dem Kreis BEH .

Es ist $\operatorname{tg}(EHB) = \frac{\omega L_2}{R_2}$. Ist $R_2 = \infty$, d. h. ist der sekundäre Stromkreis unterbrochen, so liegt der Vektor der primären Spannung in OB . Dieser Zustand heißt der Leerlauf des Transformators, die primäre Spule verhält sich wie eine Drosselspule, die Leerlaufspannung ist

$$P_{10} = J_1 \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}.$$

Ist der sekundäre Stromkreis kurzgeschlossen, so ist R_2 nur gleich dem Eigenwiderstand der sekundären Spule. Hierbei liegt der Vektor der Klemmenspannung in OK , und es ist

$$BK:KH = BF:FC = \omega L_2:R_2.$$

OK ist die Klemmenspannung bei Kurzschluß.

Das Diagramm zeigt die verschiedenen Streukoeffizienten. Es war

$$CB:AB = M:L_1 = 1:v_1,$$

daher ist

$$AC:AB = (L_1 - M):L_1 = S_1:L_1,$$

ferner war

$$BE:BD = BH:BC = M:L_2 = 1:v_2$$

$$HC:BC = (L_2 - M):L_2 = S_2:L_2,$$

endlich ist

$$\frac{AH}{AB} = 1 - \frac{HB}{AB} = 1 - \frac{CB}{AB} \frac{HB}{CB} = 1 - \frac{M}{L_1} \frac{M}{L_2} = 1 - \frac{1}{v_1} \frac{1}{v_2} = \sigma.$$

Messung der gesamten Streuung.

Die Streuung wird mittels der beiden besonderen Punkte für Leerlauf und Kurzschluß wie folgt durch Messung ermittelt.

Man mißt bei offenem sekundären Kreis den Strom J_1 , die

Spannung P_{10} und die Leistung N_{10} , und trägt den Vektor der Spannung $P_{10} = OB$ unter dem Winkel φ_0 gegen den Strom auf, worin

$$\cos \varphi_0 = \frac{N_{10}}{J_1 P_{10}}$$

ist, und fällt das Lot BA von B auf den Vektor des Stromes. Zweitens mißt man bei kurzgeschlossenen sekundären Klemmen den Strom J_1 , die Kurzschlußspannung P_{1k} und die Leistung N_{1k} , und trägt $P_{1k} = OK$ unter dem Winkel φ_k gegen J_1 auf, wobei

$$\cos \varphi_k = \frac{N_{1k}}{P_{1k} J_1}.$$

Verbindet man B mit K und zieht KH senkrecht zu BK bis zum Schnitt H mit AB , so hat man wie gezeigt

$$AH : AB = \sigma.$$

Sind die Widerstände der beiden Wicklungen vernachlässigbar klein, so ist die Leerlaufspannung sehr nahe gleich AB und ebenso die Kurzschlußspannung gleich AH , daher

$$\sigma \cong \frac{P_{1k}}{P_{10}}.$$

Das Stromdiagramm für induktionsfreie Belastung kann durch Inversion aus dem Spannungsdiagramm abgeleitet werden, es ergibt nach S. 39 wieder einen Kreis. Da dieses Diagramm in Kap. XII in allgemeinerer Form abgeleitet und diskutiert wird, sei darauf verwiesen.

55. Stromkreise mit induktiv verketteten Systemen.

Bei dem behandelten Beispiel des Transformators waren die beiden magnetisch verketteten Stromkreise elektrisch voneinander unabhängig. In vielen Fällen sind induktiv verkettete Systeme aber auch gleichzeitig elektrisch verkettet, sei es, daß sie in Reihe oder parallel zueinander geschaltet sind, sei es, daß sie einer Stromverzweigung oder den Zweigen eines verketteten Mehrphasensystems angehören. In allen solchen Fällen ist auf das Vorzeichen der gegenseitigen Induktion M Rücksicht zu nehmen. Beim Transformator hatten wir stillschweigend M positiv angenommen, es ergab sich der sekundäre Strom um weniger als 180° gegen den primären verzögert, wobei die Abweichung von 180° bei sehr kleinem Widerstand verschwindet. Dies bedeutet, daß der induzierte Strom dem erzeugenden Feld entgegenwirkt. Wir untersuchen einige einfache Fälle der elektrischen Verkettung.

1. Reihenschaltung. Zwei Spulen führen denselben Strom. Je nachdem das gemeinsame Feld die Summe oder die Differenz der Einzelfelder ist, ist M positiv oder negativ zu setzen. (Gleichsinnige Schaltung oder Gegensinnige Schaltung der Spulen.) Die eine Schaltung erhält man aus der anderen durch Umkehrung der Stromrichtung in einer der beiden Spulen. Hierauf beruht eine Messung der gegenseitigen Induktion. Addieren sich die Felder, so ist die resultierende Induktivität

$$L' = L_1 + L_2 + 2M.$$

Kehrt man den Strom in einer Spule um, so wird

$$L'' = L_1 + L_2 - 2M.$$

Daher

$$M = \frac{1}{4}(L' - L'').$$

Die Blindspannungen an den beiden Spulen sind bei der gleichsinnigen Schaltung

$$J \omega (L_1 + M) \quad \text{und} \quad J \omega (L_2 + M),$$

bei der Gegensinnigen Schaltung

$$J \omega (L_1 - M) \quad \text{und} \quad J \omega (L_2 - M).$$

Hierin kann eine der beiden Spannungen negativ werden. Bei gleichgeformten Spulen verhalten sich die L wie die Quadrate der Windungszahlen, während M je nach der Größe der Streuung kleiner als $\sqrt{L_1 L_2}$ ist. Sei z. B.

$$w_1 : w_2 = 2 : 1, \quad L_1 : L_2 = 4 : 1, \quad M = 1,75$$

in beliebigen Einheiten, so wird $(L_2 - M) = -0,75$. Bei Gegensinniger Schaltung ist in Spule 2 der Strom gegen die Spannung voreilend. Gegen die ganze Spannung an beiden Spulen ist der Strom stets verzögert, da $L_1 + L_2 - 2M$ stets positiv ist.

2. Parallelschaltung. Beide Zweige haben dieselbe Spannung

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{S}_1(R_1 + j\omega L_1) + j\mathfrak{S}_2 \omega M \\ \mathfrak{P} &= \mathfrak{S}_2(R_2 + j\omega L_2) + j\mathfrak{S}_1 \omega M \end{aligned} \right\} \dots (162)$$

wo M zunächst positiv eingesetzt ist. Das Verhältnis der Ströme wird daher

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2} = \frac{R_2 + j\omega(L_2 - M)}{R_1 + j\omega(L_1 - M)}.$$

a) Die Zweige seien gleich

$$R_1 = R_2 = R, \quad L_1 = L_2 = L.$$

Hier werden die Zweigströme unter sich gleich, $J_1 = J_2$, und je die Hälfte des Gesamtstromes. Jeder Zweig verhält sich, als ob er der Widerstand R und die Induktivität $(L + M)$ hätte, der resultierende

Scheinwiderstand ist die Hälfte von dem jedes Zweiges. Bei positivem M addieren sich die Felder, der Scheinwiderstand ist groß, die Stromaufnahme für eine bestimmte Spannung klein, bei negativem M heben sich die Felder bis auf die Streufelder auf, der Scheinwiderstand ist klein.

b) Bei ungleichen Zweigen verteilt sich der Gesamtstrom zu ungleichen Teilen. Kann man die Widerstände vernachlässigen

$$R_1 = R_2 \cong 0,$$

so wird

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{L_2 - M}{L_1 - M}.$$

Für positives M kann hier das Stromverhältnis negativ werden, die Teilströme sind einander entgegengerichtet, der Gesamtstrom J hat die Richtung des Zweigstromes mit der kleineren Induktivität.

Ist z. B. wieder

$$L_1 : M : L_2 = 4 : 1,75 : 1,$$

so wird

$$J_1 = -\frac{1}{3}J, \quad J_2 = 1,5J, \quad J_1 = -0,5J.$$

Die resultierende Induktivität wird (für $R=0$)

$$\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

Bei zwei ineinandergeschobenen Spulen, deren Windungsebenen gegeneinander verdreht werden können, Fig. 113, erhält man für jeden Verdrehungswinkel zwischen 0 und 180° einen anderen Wert von M zwischen $+M$ und $-M$. Bei 90° ist die gegenseitige Induktion Null. Durch Reihenschaltung oder Parallelschaltung der Spulen erhält man 2 Bereiche mit in weiten Grenzen stetig veränderlicher Induktivität. Derartige Variatoren der Selbstinduktion¹⁾ werden zu Meßzwecken und zum Abstimmen von Schwingungskreisen verwendet. Aus den Beziehungen für die Reihenschaltung und die Parallelschaltung findet man, daß die Bereiche sich aneinander anschließen, wenn

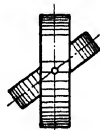


Fig. 113.

$$L_1 L_2 - M^2 = (L_1 + L_2 - 2M)^2$$

gemacht wird. Ist z. B.

$$L_1 : M : L_2 = 5 : 2,6 : 2,$$

so ergibt die Reihenschaltung den Bereich von 12,2 bis 1,8 die Parallelschaltung von 1,8 bis 0,147.

c) Sind die Widerstände nicht zu vernachlässigen, so ist die Phasenverschiebung zwischen den Zweigströmen bei ungleichen Zweigen kleiner als 180° . Der resultierende Fluß, der der Summe der

¹⁾ s. M. Wien. Ann. d. Phys. 1896. 57. S. 249. H. Hausrath. Zschr. f.

Durchflutungen der parallelen Zweige proportional ist, hat dann bei ungleichen Windungszahlen eine andere Phase als der resultierende Strom. Man macht hiervon mitunter bei Maschinen zur Erzeugung einer bestimmten Phasenverschiebung zwischen dem Strom und seinem Feld Gebrauch (Wendefeld von Wechselstrommotoren). In anderen Fällen ist die ungleiche Verteilung der Ströme schädlich, weil die Stromwärme viel größer ist, als bei gleicher Stromverteilung. Oft unterteilt man in Maschinen und Transformatoren Spulen für hohe Stromstärken in parallele Spulen; bei diesen sind die Windungszahlen und Widerstände gleichgroß, M ist positiv. Infolge verschiedener Lage gegenüber dem Eisen, z. B. in Ankernuten können die L sehr verschieden werden. Durch vollständig symmetrische Anordnung ist dafür zu sorgen, daß nur Spulen gleicher Induktivität parallel geschaltet werden.

3. Stromverzweigungen. Als Beispiel untersuchen wir die Schaltung Fig. 114. Die sekundäre Spule eines Transformators liegt parallel zu einer Drosselspule z_3 , die in Reihe mit der primären Spule des Transformators liegt. Der Strom J_3 in der Drosselspule ist die Summe des primären und des sekundären Transformator-

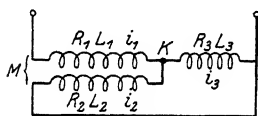


Fig. 114.

stromes J_1 und J_2 . Ist die Schaltung so getroffen, daß J_2 in dem äußeren Stromkreis J_1 entgegengerichtet ist und das Windungsverhältnis so gewählt, daß $J_2 > J_1$ ist, so erhält man das auf den ersten Blick befremdende Ergebnis, daß die Ströme in der

Reihenschaltung von primärer Transformatorspule und von Drosselspule in nahezu entgegengesetzter Richtung fließen können.

Rechnen wir J_1 und J_2 positiv in Richtung nach dem Knotenpunkt K , J_3 positiv von dem Knotenpunkt fort, so muß für diesen Fall das Verhältnis $J_3 : J_1$ eine negative Zahl ergeben. Für den Sekundärkreis ist nach dem zweiten Kirchhoffschen Satz

$$j\mathfrak{S}_1 \omega M + \mathfrak{S}_2 (R_2 + j\omega L_2) + \mathfrak{S}_3 (R_3 + j\omega L_3) = 0.$$

Für den Knotenpunkt

$$\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3.$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit $(R_2 + j\omega L_2)$ und subtrahiert von der ersten, so fällt \mathfrak{S}_2 fort und es wird

$$\mathfrak{S}_3 = -\mathfrak{S}_1 \frac{j\omega(M - L_2) - R_2}{j\omega(L_3 + L_2) + (R_3 + R_2)}.$$

Sind die Widerstände klein und $M > L_2$, d. h. $w_1 > w_2$, so nähert sich der Ausdruck dem Wert $-\frac{M - L_2}{L_3 + L_2}$. Ist hingegen

$$w_1 < w_2, \quad M < L_2,$$

so erhält man den positiven Ausdruck $\frac{L_2 - M}{L_3 + L_2}$ und endlich, wenn.

die Klemmen der sekundären Transformatorwicklung vertauscht werden, wobei M negativ wird, $\frac{M + L_3}{L_3 + L_2}$. In den beiden letzten Fällen ist J_3 mit J_1 nahezu gleichgerichtet. Im ersten Fall ist die Netzspannung die Differenz der Teilspannungen an Transformator und Drosselspule, im zweiten die Summe.

Als zweites Beispiel sei die Messung der gegenseitigen Induktion zweier Spulen in der Brücke Fig. 115 angeführt.

Damit das Galvanometer nicht ausschlägt, muß

$$i_2 = i_1, \quad i_4 = i_3$$

sein. Sind die Spulen so geschaltet, daß im Stromzweig 1 die EMK der gegenseitigen Induktion des unverzweigten Stromes $(i_1 + i_3)$ der EMK der Selbstinduktion des Stromes i_1 entgegengerichtet ist, so sind die Bedingungen dafür, daß keine Spannung am Galvanometer besteht:

$$j\omega L_1 \mathfrak{I}_1 - j\omega M (\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_3) + \mathfrak{I}_1 R_1 = \mathfrak{I}_3 R_3 \dots (163)$$

und

$$\mathfrak{I}_1 R_2 = \mathfrak{I}_3 R_4 \dots (164)$$

Die erste Bedingung zerfällt in die beiden Teile

$$\mathfrak{I}_1 R_1 = \mathfrak{I}_3 R_3 \dots (163a)$$

und

$$j\omega L_1 \mathfrak{I}_1 = j\omega M (\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_3) \dots (163b)$$

Gl. 164 und 163a ergeben

$$R_1 : R_2 = R_3 : R_4 \dots (165)$$

wie für Gleichstrom, dann ist

$$\mathfrak{I}_3 : \mathfrak{I}_1 = R_1 : R_3 = R_2 : R_4.$$

Der Wert für \mathfrak{I}_3 in Gl. 163b eingesetzt, gibt

$$\frac{M}{L_1} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_4}{R_2 + R_4} \dots (166)$$

56. Gegenseitige Induktion mehrphasiger Stromkreise.

Sind die drei Stromkreise eines Dreiphasensystems magnetisch miteinander verkettet, und sind die Ströme i_1, i_2, i_3 , die Spannungen

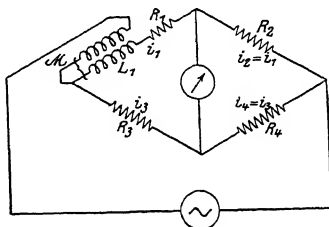


Fig. 115.

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} + M_{31} \frac{di_3}{dt} \\ p_2 &= i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} + M_{32} \frac{di_3}{dt} \\ p_3 &= i_3 R_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{13} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (167)$$

worin nach Seite 130 Gl. 146 stets

$$M_{12} = M_{21}, \quad M_{23} = M_{32}, \quad M_{31} = M_{13}.$$

a) Ist das System vollständig symmetrisch

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = R \\ L_1 &= L_2 = L_3 = L \\ M_{12} &= M_{23} = M_{31} = M, \end{aligned}$$

und ist die Bedingung

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (168)$$

erfüllt, so wird aus Gl. 167

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= i_1 R + (L - M) \frac{di_1}{dt} \\ p_2 &= i_2 R + (L - M) \frac{di_2}{dt} \\ p_3 &= i_3 R + (L - M) \frac{di_3}{dt} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (169)$$

Die drei Stromkreise verhalten sich so, als ob jeder allein vorhanden wäre und eine Induktivität $(L - M)$ hätte. Der resultierende magnetische Fluß, der jeden Stromkreis durchsetzt, ist mit dem Strom dieses Kreises phasengleich. Die Gleichungen gelten für Momentanwerte, daher unabhängig von der Kurvenform des Stromes.

b) Ist das System unsymmetrisch angeordnet, d. h. sind die voneinander verschieden, so ist bei Abwesenheit eines Nulleiters

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

stets erfüllt. Dann ist aber der magnetische Fluß eines Stromkreises nicht mehr in Phase mit dem Strom dieses Kreises. Ist z. B.

$$M_{12} > M_{13},$$

so setzen wir

$$M_{12} = M_{13} + m.$$

Die Blindspannung des Stromes i_1 wird nach der ersten drei Gl. 167

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} + M_{31} \frac{di_3}{dt} = (L - M_{13}) \frac{di_1}{dt} + m \frac{di_2}{dt}.$$

Bei einwilligen Strömen ist diese Spannung nicht mehr um i_1 gegen i_1 verschoben, weil das Glied $m \frac{di_2}{dt}$ hinzutritt, das um i_2

gegen i_3 voreilt, also gegen i_1 um 30° verzögert ist. Die Spannung ist z. T. in Phase mit dem Strom, d. h. die Stromkreise übertragen eine Leistung aufeinander. Diese Erscheinung hat Blondel als „schiefwinklige“ Reaktanz bezeichnet und bei Wechselstromleitungen eingehend untersucht¹⁾.

Betrachten wir eine Dreiphasenleitung, die kurz sei und deren Kapazität vernachlässigt werde. Die Leitung besteht aus 3 Drähten. Fügt man als vierten Leiter die Erde hinzu, so ist diese stromlos, wenn Gl. 168 erfüllt ist. Es sind dann 3 Schleifen vorhanden, die aus je einem Draht und Erde gebildet werden, deren Induktivitäten L_1, L_2, L_3 , deren Widerstände R_1, R_2, R_3 und deren Wechselinduktivitäten M_{12}, M_{13}, M_{23} sind. Diese drei Schleifen superponieren wir.

Die Spannungen am Anfang der Leitung sollen mit dem Index I , die am Ende mit II bezeichnet werden.

Dann werden die Gl. 167

$$\left. \begin{aligned} (p_{1I} - p_{1II}) &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} + M_{31} \frac{di_3}{dt} \\ (p_{2I} - p_{2II}) &= i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} + M_{32} \frac{di_3}{dt} \\ (p_{3I} - p_{3II}) &= i_3 R_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{13} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (167a)$$

Bei einwilligen Strömen können diese Gleichungen für beliebige Stromverteilung im Vektordiagramm dargestellt und daraus die Änderungen der Phasenspannungen ermittelt werden. Für den besonderen Fall der symmetrischen Stromverteilung einwilliger Ströme setzen wir symbolisch

$$i_1 = \Im_1, \quad i_2 = \Im_2 = \Im_1 e^{-j120}, \quad i_3 = \Im_3 = \Im_1 e^{-j240},$$

ferner sei

$$R_1 = R_2 = R_3 = R,$$

so wird

$$\begin{aligned} (\mathfrak{P}_{1I} - \mathfrak{P}_{1II}) &= \Im_1 R + j\omega L_1 \Im_1 + j\omega M_{21} \Im_1 e^{-j120} + j\omega M_{31} \Im_1 e^{-j240} \\ (\mathfrak{P}_{2I} - \mathfrak{P}_{2II}) &= \Im_2 R + j\omega L_2 \Im_2 + j\omega M_{12} \Im_2 e^{j120} + j\omega M_{32} \Im_2 e^{-j120} \\ (\mathfrak{P}_{3I} - \mathfrak{P}_{3II}) &= \Im_3 R + j\omega L_3 \Im_3 + j\omega M_{13} \Im_3 e^{j240} + j\omega M_{23} \Im_3 e^{j120} \end{aligned}$$

oder, da

$$e^{\pm j120} = \cos 120^\circ \pm j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} \pm j \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$e^{\pm j240} = \cos 240^\circ \pm j \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} \mp j \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{P}_{1I} - \mathfrak{P}_{1II}) &= \Im_1 \left[R + \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega (M_{21} - M_{31}) \right. \\ &\quad \left. + j\omega \Im_1 \left[L_1 - \frac{1}{2} (M_{21} + M_{31}) \right] \right] \\ (\mathfrak{P}_{2I} - \mathfrak{P}_{2II}) &= \Im_2 \left[R + \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega (M_{32} - M_{12}) \right. \\ &\quad \left. + j\omega \Im_2 \left[L_2 - \frac{1}{2} (M_{12} + M_{32}) \right] \right] \\ (\mathfrak{P}_{3I} - \mathfrak{P}_{3II}) &= \Im_3 \left[R - \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega (M_{23} - M_{13}) \right. \\ &\quad \left. + j\omega \Im_3 \left[L_3 - \frac{1}{2} (M_{13} + M_{23}) \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

¹⁾ Ecl. électrique 1906.

Die Blindspannungen sind durch die zweiten Glieder bestimmt. Die Wirkspannung jeder Phase enthält ein zusätzliches Glied, das von der gegenseitigen Induktion der beiden andern Schleifen herrührt und der Leistungsübertragung zwischen den Schleifen entspricht. Die Summe dieser Leistungen ist Null, die Leistung schwingt zwischen den 3 Leitungen, nach außen ist die Schwingung ausgeglichen.

Bei Leitungen, die symmetrisch zueinander liegen und sehr weit von Erde entfernt sind, sind die drei M einander gleich, dann gelten die Gl. 169.

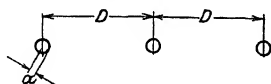


Fig. 116.

Sind dagegen die 3 Leitungen in einer Ebene in gleichem Abstand von Erde angeordnet (s. Fig. 116), so ist aus Symmetriegründen

$$L_1 = L_2 = L_3$$

und

$$M_{12} = M_{32}, \quad M_{13} = M_{31}.$$

Hiermit werden Gl. 170

$$\left. \begin{aligned} (\Re_{1I} - \Re_{1II}) &= \Im_1 \left[R + \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega (M_{12} - M_{13}) \right] \\ &\quad + j \omega \Im_1 \left[L_1 - \frac{1}{2} (M_{12} + M_{13}) \right] \\ (\Re_{2I} - \Re_{2II}) &= \Im_2 R + j \omega \Im_2 [L_2 - M_{12}] \\ (\Re_{3I} - \Re_{3II}) &= \Im_3 \left[R - \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega (M_{23} - M_{13}) \right] \\ &\quad + j \omega \Im_3 \left[L_3 - \frac{1}{2} (M_{13} + M_{23}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Es ist $(M_{12} - M_{13})$ der Fluß, den der Strom 1 im Leiter durch die aus den Leitern 2—3 gebildete Schleife sendet, analog

$(L_1 - M_{12})$ der Fluß des Leiters 1 durch die Schleife 1—2
 $(L_1 - M_{13})$ " " " " " " " " 1—3

usf. Nach S. 132 wird für eine Leitungslänge l km

$$(M_{12} - M_{13}) = (M_{32} - M_{31}) = 2 l \ln 2 \cdot 10^{-4} \text{ Henry}$$

und nach S. 14

$$(L_1 - M_{12}) = (L_2 - M_{12}) = (L_3 - M_{32}) = l \left(2 \ln \frac{D}{a} + 0,5 \right) 10^{-4} \text{ Henry}$$

$$(L_1 - M_{13}) = (L_3 - M_{13}) = l \left(2 \ln \frac{2D}{a} + 0,5 \right) 10^{-4} \text{ Henry}.$$

Hiermit wird die resultierende Induktivität des inneren Leiters (2)

$$L_i = l \left(2 \ln \frac{D}{a} + 0,5 \right) 10^{-4} \text{ Henry}$$

und für die beiden äußeren Leiter (1 und 3)

$$L_a = l \left(2 \ln \frac{D}{a} + \ln 2 + 0,5 \right) 10^{-4} = l \left(2 \ln \frac{D}{a} + 1,193 \right) 10^{-4} \text{ Henry}.$$

Die scheinbare Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Ohmschen Widerstandes in den beiden äußeren Leitern ist

$$R_s = \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega 2 l \ln 2 \cdot 10^{-4} = \omega l 1,196 \cdot 10^{-4} \text{ Ohm}.$$

Der Spannungsabfall in den drei Leitungen ist verschieden. Bilden die Spannungen am Anfang der Leitung ein symmetrisches Dreiphasensystem, so ist dies am Ende der Leitung nicht mehr der Fall.

Beispiel. Es sei $D = 100$ cm, $a = 0,5$ cm,

$$\frac{L_i}{l} = (2 \ln 200 + 0,5) 10^{-4} = 11,1 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km}$$

$$\frac{L_a}{l} = (2 \ln 200 + 1,193) = 11,8 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km.}$$

Der Unterschied beträgt ca. 6%.

Der Ohmsche Widerstand eines Leiters ist

$$\frac{R}{l} = \frac{1}{57} \cdot \frac{1000}{78,5} = 0,224 \text{ Ohm/km,}$$

der zusätzliche Widerstand der Außenleiter bei 50 Perioden

$$\frac{R_s}{l} = \pm 314 \cdot 1,196 \cdot 10^{-4} = \pm 0,0375 \text{ Ohm/km,}$$

d. h. nahezu 17% des Ohmschen Widerstandes.

Die Unsymmetrien können dadurch aufgehoben werden, daß man die Leitungen in gewissen Abständen verdreht, um die äußeren Leiter mit dem inneren zu vertauschen.

Besonders stark treten diese Unsymmetrien bei Bahnen auf die mit Dreiphasenstrom betrieben werden und bei denen zwei Leitungen als Oberleitung (Fahrdrähte) verlegt sind, während die dritte durch die Schienen gebildet wird.

57. Die Stromverteilung in massiven Leitern.

Ein Gleichstrom verteilt sich im allgemeinen gleichmäßig über den Querschnitt des Leiters. Anders ist es bei Wechselstrom. Der Leiter gehört einem Stromsystem an, dessen magnetisches Wechselfeld auch den Leiter selbst durchsetzt.

Die inneren und äußeren Stromfäden eines Leiters sind nicht mit der gleichen Zahl Induktionslinien verkettet, in den inneren Stromfäden werden größere EMKe induziert als in den äußeren, so daß im allgemeinen die Stromdichte im Innern des Leiters geringer ist als gegen den Rand hin, und die Phase des Stromes ist im Innern eine andere als am Rande. Diese Erscheinung der Verdrängung des Stromes nach der Oberfläche bezeichnet man als Hautwirkung (Skinneffekt), sie bedingt eine Erhöhung des Stromwärmeverlustes gegenüber der gleichmäßigen Stromverteilung über den Querschnitt.

Ist di der Strom in einem Querschnittselement dq , so ist die Stromdichte in diesem Element

$$s_x = \frac{di}{dq}.$$

Die Summierung aller Stromelemente di über den Querschnitt q ergibt den gesamten Strom

$$i = \int_q s_x dq.$$

In einem Volumenelement vom Querschnitt dq und der Länge 1 cm ist, wenn ρ der spez. Widerstand des Leiters ist, die Stromwärme in jedem Augenblick

$$s_x^2 \rho dq.$$

Für einen einwelligen Strom sei S_x die effektive Stromdichte in dem betrachteten Element, dann ist die mittlere Stromwärme

$$N_x = S_x^2 \rho dq$$

und für den ganzen Querschnitt

$$N = \rho \int_q S_x^2 dq.$$

Bei gleichmäßiger Stromverteilung wäre der Effektivwert der mittleren räumlichen Stromdichte

$$S = \frac{J}{q}$$

und der Verlust

$$N_g = \rho S^2 q.$$

Daher ist

$$\frac{N}{N_g} = \frac{1}{q} \int_q \frac{S_x^2 dq}{S^2} \dots \dots \dots (172)$$

Drückt man in beiden Fällen den Verlust durch $J^2 R$ aus, so sind bei gleichem effektiven Gesamtstrom J verschiedene Widerstände R einzusetzen. Man spricht daher von einem Wechselstromwiderstand R im Gegensatz zu dem mit Gleichstrom gemessenen Widerstand R_g und bezeichnet als Widerstandsverhältnis k_r

$$k_r = \frac{R}{R_g} = \frac{1}{q} \int_0^q \frac{S_x^2 dq}{S^2} \dots \dots \dots (172a)$$

Als Beispiel möge eine ebene Kupferplatte betrachtet werden, deren Fläche groß gegen ihre Dicke ist, und die von geraden parallelen Stromfäden durchflossen wird. Das zugehörige magnetische Feld hat überall dieselbe Richtung senkrecht zur Richtung der Stromfäden. Im Außenraum sei das Feld auf der einen Seite homogen, auf der andern Null.

Dieser Fall liegt angenähert vor bei parallelen Sammelschienen oder bei Transformatoren, die mit rechteckigen Kupferschienen bewickelt sind.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde (Fig. 117). Die Plattenfläche, an der das magnetische Feld Null ist, liege in der XZ -Ebene, die Richtung der Feldstärke falle in die

Für ein schmales Rechteck mit den Seiten $AB=CD=1$, $AD=BC=dy$, setzen wir die magnetische Randspannung gleich der Durchflutung. \mathfrak{S} ist der Vektor der Stromdichte. Da die Anteile der kurzen Seiten entgegengesetzt gleich sind, wird

$$-\mathfrak{S} + \left(\mathfrak{S} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} dy \right) = \mathfrak{S} \cdot 1 \cdot dy$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} = \mathfrak{S} \dots \dots \dots (173)$$

Für ein entsprechendes Rechteck $abcd$ in der XY -Ebene mit den Seiten 1 und dy setzen wir die elektrische Umlaufspannung gleich dem magnetischen Schwund. In dem Leiter ist die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E} = \mathfrak{S} \rho$, wenn ρ der spez. Widerstand ist. Da \mathfrak{S} und \mathfrak{E} sich in der X -Richtung nicht ändern sollen, liefern die kurzen Seiten entgegengesetzt gleiche Anteile und es wird für einen unmagnetischen Leiter ($\mu=1$)

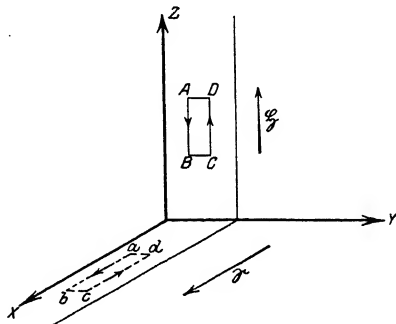


Fig. 117.

$$\mathfrak{E} - \left(\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} dy \right) = -\mu_0 \frac{\partial (\mathfrak{S} dy)}{dt}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} = \rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} = \mu_0 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \dots \dots \dots (174)$$

Für einen einwelligen Strom seien \mathfrak{S} und \mathfrak{S} die Effektivwerte. Wir schreiben daher für den Differentialquotienten von \mathfrak{S} nach der Zeit symbolisch $j \omega \mathfrak{S}$

$$\mu_0 j \omega \mathfrak{S} = \rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} \dots \dots \dots (174a)$$

Differentiiert man Gl. (174a) nach ∂y und setzt Gl. (173) ein, so wird

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial y^2} = \frac{\mu_0 \omega}{\rho} j \mathfrak{S} \dots \dots \dots (175)$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial y^2} = \frac{\mu_0 \omega}{\rho} j \mathfrak{S} \dots \dots \dots (175a)$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{\mu_0 \omega}{2 \rho} = k^2$, so wird Gl. (175a)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial y^2} = 2 k^2 j \mathfrak{S} \dots \dots \dots (175b)$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch den Ansatz

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} e^{-\alpha y},$$

dann ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} = -\alpha \mathfrak{H}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial y^2} = \alpha^2 \mathfrak{H}.$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (175 b) ein, so wird

$$\alpha^2 = 2 k^2 j \\ \alpha = \pm k(1 + j).$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (175 b) besteht daher aus zwei Teilen

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}_1 e^{k(1+j)y} + \mathfrak{A}_2 e^{-k(1+j)y}. \quad \dots (176)$$

Für $y = 0$ sollte $\mathfrak{H} = 0$ sein, daher wird

$$\mathfrak{A}_2 = -\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \\ \mathfrak{H} = \mathfrak{A} [e^{k(1+j)y} - e^{-k(1+j)y}]. \quad \dots (176a)$$

Aus Gl. (173) folgt

$$\mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} = \mathfrak{A} k(1+j) [e^{k(1+j)y} + e^{-k(1+j)y}]. \quad (177)$$

Der räumliche Mittelwert der effektiven Stromdichte, dessen Quadrat im Nenner von Gl. (172) vorkommt, wird nun, wenn d die Dicke der Platte bezeichnet,

$$\frac{1}{d} \int_0^d \mathfrak{E} dy = \frac{\mathfrak{A}}{d} [e^{k(1+j)d} - e^{-k(1+j)d}]. \quad \dots (178)$$

Hierin kann die rechte Seite auf die Form

$$(a + jb)$$

gebracht werden, das Quadrat des Effektivwertes ist dann

$$a^2 + b^2 = (a + jb)(a - jb).$$

Man hat also die rechte Seite von Gl. (178) mit dem konjugierten Vektor zu multiplizieren, indem man $+j$ durch $-j$ ersetzt. Es wird:

$$S^2 = \frac{a^2}{d^2} (e^{k(1+j)d} - e^{-k(1+j)d}) (e^{k(1-j)d} - e^{-k(1-j)d}) \\ = \frac{a^2}{d^2} (e^{2kd} + e^{-2kd} - e^{2jkd} - e^{-2jkd}).$$

Hierin ist a der Modul von \mathfrak{A} und

$$\frac{e^{2kd} + e^{-2kd}}{2} = \mathfrak{Cof} 2kd, \quad \frac{e^{2jkd} + e^{-2jkd}}{2} = \cos 2kd,$$

daher

$$S^2 = \frac{2a^2}{d^2} (\mathfrak{Cof} 2kd - \cos 2kd). \quad \dots (179)$$

Im Zähler von Gl. (172) steht der räumliche Mittelwert der Quadrate der effektiven Stromdichten. Das Quadrat des Effektiv-

wertes der Stromdichte für einen Punkt im Abstand y von der XZ -Ebene berechnet sich analog mittels Gl. (177).

$$S_y^2 = a^2 k^2 (1 + j)(1 - j) [e^{k(1+j)y} + e^{-k(1+j)y}] [e^{k(1-j)y} + e^{-k(1-j)y}].$$

Durch ähnliche Umformung wie oben wird

$$S_y^2 = 4 a^2 k^2 (\cos 2ky + \cos 2ky).$$

Der räumliche Mittelwert hiervon ist

$$\frac{1}{d} \int_0^d S_y^2 dy = \frac{4 a^2 k^2}{2kd} (\sin 2kd + \sin 2kd) \dots (180)$$

Endlich erhalten wir

$$k_r = \frac{R}{R_g} = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{S_y^2 dy}{S^2} = kd \frac{\sin 2kd + \sin 2kd}{\cos 2kd - \cos 2kd} \dots (181)$$

Für kleine Werte von $2kd$ kann man die Hyperbel- und Kreisfunktionen in Reihen entwickeln und erhält die Näherungsformel

$$k_r = 1 + \frac{(2kd)^4}{180}.$$

Es war

$$k^2 = \frac{\mu_0 \omega}{2\rho}, \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-9}, \quad 2kd = 4\pi d \sqrt{\frac{f}{\rho \cdot 10^9}}.$$

Für Kupfer ist $\rho = 17 \cdot 10^{-7}$ Ohm cm²/cm, und für $f = 50$ Perioden/sek

$$k_r = 1 + 0,12 d^4 \dots \dots \dots (182)$$

Für eine Kupferplatte von 1 cm Dicke ist also die Erhöhung des Widerstandes $12 \cdot 10^{-8}$.

Für große Werte von $2kd$ werden \sin und \cos einander gleich und groß gegen die Kreisfunktionen, dann ist

$$k_r = d \sqrt{\frac{2\pi\omega}{\rho \cdot 10^9}}.$$

Der Widerstand wächst proportional der Wurzel aus der Frequenz.

Für zylindrische Leiter¹⁾ ergibt die Rechnung Besselsche Funktionen. Angenähert ist, wenn d der Durchmesser ist,

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_g} &= 1 + \frac{1}{3} \left(k \frac{d}{4} \right)^4 \\ &= 1 + \frac{\pi^4}{48} \frac{f^2 d^4}{\rho^2 \cdot 10^{18}}. \end{aligned}$$

¹⁾ W. Thomson, Electrician London Bd. 25, 1890, S. 510. ETZ 1890, S. 661. Stefan, Wiedem. Annalen Bd. 41, S. 400ff.

Setzt man wieder für Kupfer $\varrho = 17 \cdot 10^{-7}$ Ohm cm²/cm, so wird

$$k_r = 1 + 0,70 \left(\frac{f d^2}{1000} \right)^2 \dots \dots \dots (183)$$

Für einen Draht von $d = \sqrt{2}$ cm wird für 50 Perioden/sek

$$k_r = 1,007.$$

Bei hohen Periodenzahlen wird dagegen

$$k_r = k \frac{d}{4} = \frac{\pi d}{2} \sqrt{\frac{f}{\varrho \cdot 10^9}}.$$

Diese Gleichungen gelten nur, wenn keine Beeinflussung der Leiter durch benachbarte Felder erfolgt.

Bei verseilten Kabeln¹⁾ z. B. findet eine gegenseitige Beeinflussung statt, die größte Stromdichte tritt an den einander zugewandten Teilen auf. Eine einseitige Stromverdrängung tritt bei Stäben in Ankernuten²⁾ auf; am Nutengrund ist das Feld am schwächsten und die Stromfäden drängen sich nach der Nutöffnung.

Liegen in der Nut n in Reihe geschaltete Stäbe übereinander, so ist nach Field und Emde³⁾ für die ganze Nut

$$k_r = \varphi(x) + \frac{n^2 - 1}{3} \psi(x),$$

worin

$$\varphi(x) = x \frac{\mathfrak{S}in 2x + \sin 2x}{\mathfrak{C}of 2x - \cos 2x}$$

$$\psi(x) = 2x \frac{\mathfrak{S}in x - \sin x}{\mathfrak{C}of x + \cos x}$$

$$x = h \sqrt{\frac{2 \pi \mu \omega b'}{\varrho \cdot 10^9 b}},$$

h ist die Höhe eines Stabes, b die Nutenbreite, b' die Kupferbreite.

Nach Rogowski³⁾ gibt es eine kritische Höhe der Nutenstäbe, die das Minimum der Verluste in der Nut darstellt. Für diese ist

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{3}{n^2 - 0,2}}.$$

¹⁾ G. Mie, Wiedemanns Annalen 1900, S. 201.

Über die Stromverdrängung bei zwei parallelen Platten s. Cohn, Das elektromagnetische Feld, S. 465; bei parallelgeschalteten Platten Schumann, E. u. M. 1913, Heft 30, 31; bei Spulen und Rollen, Sommerfeld, Annalen d. Physik 1904 und 1907; bei Litzen, Rogowski, Arch. f. El. III, 1914, H. 8/9, S. 264; IV, S. 66; VI, S. 304; VIII, S. 269.

²⁾ s. A. B. Field, Proc. of the American Institution of Electrical Engineers Bd. 24, 1905, S. 659; F. Emde, Elektrotechnik und Maschinenbau 1908, S. 703.

³⁾ Rogowski, Arch. f. El. II, S. 108. Weitere Arbeiten über Stromverdrängung in Nuten Richter, Arch. f. El. III, S. 175; IV, S. 1; V, S. 1. Bei Kommutatormaschinen Dreyfuß, Arch. f. El. III, S. 273.

Zehntes Kapitel.

Wechselstromkreise mit Eisen.

58. Der Erregerstrom. — 59. Verluste im Eisen. — 60. Die Vektordiagramme des Transformators. — 61. Das magnetische Feld einer Maschine mit verteiltem Eisen. — 62. Erzeugung eines Drehfeldes. — 63. Energieübertragung durch das Drehfeld. — 64. Reihenschaltung eines Kondensators mit einer Drosselspule mit Eisen.

58. Der Erregerstrom.

1. Magnetisierung mit Gleichstrom.

Bei Maschinen und Apparaten verläuft der magnetische Induktionsfluß der Hauptsache nach in Eisen. Die erste Aufgabe ist, zu einem gegebenen Fluß, den Erregerstrom zu berechnen, wenn die Abmessungen des magnetischen Kreises gegeben sind. Da die Permeabilität des Eisens nicht konstant ist, ist dabei die Magnetisierungskurve $\mathfrak{B} = f(\mathfrak{H})$ zugrunde zu legen, die Fig. 118 für Dynamoblech zeigt.

Die Feldstärke \mathfrak{H} wird dabei zweckmäßig in Amp./cm (oder Amperewindungen/cm) aufgetragen. Da die praktische Einheit der Induktion (1 Voltsek./cm²) eine sehr große Einheit ist, rechnet man um handlichere Zahlen zu erhalten, mit dem 10^8 Teil davon, d. i. der CGS-Einheit.

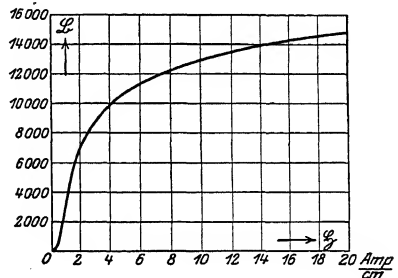


Fig. 118.

Der Verlauf der Induktionslinien im Eisen ist genau nur in wenigen Fällen bestimmbar. Bei dem gleichmäßig bewickelten Eisenring, Fig. 119, sind die Induktionslinien im Eisen konzentrische

Kreise und es ist $\mathfrak{H}_x = \frac{Jw}{2\pi x}$ Amp./cm. Trägt man zu jedem

kurve auf, so erhält man die Verteilung der Induktion über die

Ringbreite b und den Fluß $\Phi = \int_{D-\frac{h}{2}}^{D+\frac{h}{2}} h \mathfrak{B}_x dx$, für den angenommenen

Strom.

Ist die Breite b klein gegen D , so kann man die Induktion über die Breite als konstant ansehen. Man erhält dann zu jedem Fluß Φ

die mittlere Induktion $\mathfrak{B} = \frac{\Phi}{Q}$ (Q = Querschnitt des Eisens), entnimmt der Magnetisierungskurve die zugehörige Feldstärke \mathfrak{H} und

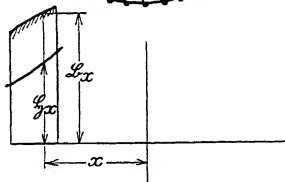
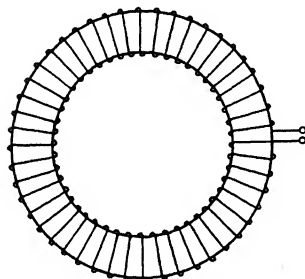
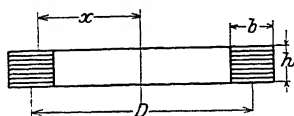


Fig. 119.

berechnet die magnetische Umlaufspannung für den mittleren Kraftlinienweg $V_0 = \pi D \mathfrak{H}$ und die Durchflutung $Jw = V_0$.

Nach diesem angenäherten Verfahren berechnet man magnetische Kreise gewöhnlich. Besitzt der Kreis verschiedene Teile von ungleichem

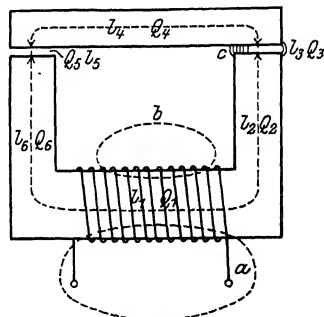


Fig. 120.

Querschnitt, s. Fig. 120, so ermittelt man zu dem Fluß Φ die mittleren Induktionen der einzelnen Teile:

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\Phi_1}{Q_1}, \quad \mathfrak{B}_2 = \frac{\Phi_2}{Q_2} \quad \text{usf.},$$

berechnet die magnetische Spannung für jeden Teil für die mittlere Länge

$$V_1 = \mathfrak{H}_1 l_1, \quad V_2 = \mathfrak{H}_2 l_2 \quad \text{usf.}$$

Die Summe ergibt die Umlaufspannung

$$V_0 = V_1 + V_2 + \dots + V_n,$$

womit die Durchflutung Jw gefunden ist.

Bei einem Luftraum verbreitert sich der Induktionsfluß wie bei c in Fig. 120. Dies wirkt als Vergrößerung des Querschnitts. Dort

wo die Erregerspulen liegen, schließt sich, wie bei a und b , ein geringer Teil des Flusses um die Spulen, ohne den ganzen magnetischen Kreis zu durchlaufen. Dieser Streufluß bewirkt eine Erhöhung des Flusses im Kern innerhalb der Erregerspulen gegenüber den übrigen Teilen.

Zur Aufnahme der Magnetisierungskurve verwendet man für Eisenstäbe ein Schlußloch, für Bleche einen Ring nach Fig. 119 oder häufig den Epsteinschen Apparat (s. S. 164), der aus Blechpaketen zu einem viereckigen Rahmen zusammengesetzt ist. Die Induktion wird mittels einer Prüfspule ballistisch oder mit Wechselstrom gemessen. Aus dem Erregerstrom und der Windungszahl berechnet man die mittlere Umlaufspannung und die mittlere Feldstärke. Dabei sind für Stoßfugen Korrekturen anzubringen. Die Messung der Teilspannungen für die Teile des magnetischen Kreises, an denen die Induktion ermittelt wird, ebenso die gesonderte Messung der Spannung an Lufträumen, Stoßfugen, ist neuerdings durch den magnetischen Spannungsmesser von Rogowski ermöglicht worden (s. Arch. f. El. I, Heft 4).

2. Zyklische Magnetisierung.

Wird das Eisen zyklisch magnetisiert, indem man die Feldstärke \mathfrak{H} allmählich zwischen zwei gleichgroßen Grenzwerten von entgegengesetzter Richtung $\pm \mathfrak{H}_{max}$ verändert, so gehören zu jedem zwischen den Grenzen liegenden Wert von \mathfrak{H} wegen der Remanenz des Eisens verschiedene Werte der Induktion \mathfrak{B} , je nachdem der Wert von \mathfrak{H} bei aufsteigender oder bei absteigender Magnetisierung erreicht wird.

Der Zusammenhang zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} für zyklische Magnetisierung wird durch die Hysteresisschleife (Fig. 121) dargestellt. Bei steigender Magnetisierung von $-\mathfrak{H}_{max}$ bis $+\mathfrak{H}_{max}$ wird sie längs $ABCD$, bei abnehmender längs $DEFA$ durchlaufen. Dem Wert $\mathfrak{H} = 0$ entspricht eine Induktion $OE = OB$, die als Remanenz bezeichnet wird. Um die Induktion Null herzustellen, ist eine Feldstärke $OC = OF$ erforderlich. Sie heißt Koerzitivkraft. Die Induktion ist daher keine eindeutige Funktion der Feldstärke, sie hängt von der Remanenz ab, die bei der vorhergehenden Magnetisierung zurückgeblieben ist. Die Magnetisierungskurve (Fig. 118), die für $\mathfrak{H} = 0$ bei $\mathfrak{B} = 0$ beginnt, kann daher nur erhalten werden, wenn das Eisen zuvor vollständig entmagnetisiert war. Sie heißt die „jungfräuliche Magnetisierungskurve“.

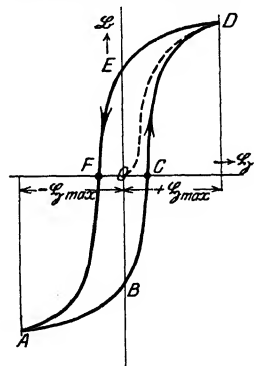


Fig. 121.

Jedem Wert von \mathfrak{H}_{max} entspricht eine andere Hysteresisschleife und die Spitzen aller Hysteresisschleifen liegen auf der jungfräulichen Kurve.

3. Hysteresisarbeit.

Einer Änderung der Induktion um $d\mathfrak{B}$ entspricht nach Maxwell eine Zunahme der magnetischen Energie in der Volumeneinheit um $\mathfrak{H} d\mathfrak{B}$. Bei Medien mit konstanter Permeabilität ergibt sich hieraus der wiederholt verwendete Ausdruck für den Energiegehalt des Feldes (s. S. 12). Bei Eisen ist die Magnetisierungskurve zugrunde zu legen.

Wächst die Feldstärke von \mathfrak{H}_1 bis \mathfrak{H}_2 , die Induktion von \mathfrak{B}_1 bis \mathfrak{B}_2 , so ist die Energiezunahme für die Volumeneinheit

$$\int_{\mathfrak{H}_1}^{\mathfrak{H}_2} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}.$$

Sie ist gleich der Fläche $A_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 A_2$ in Fig. 122. Geht die Induktion von \mathfrak{B}_2 auf \mathfrak{B}_1 zurück, so verläuft die Magnetisierung längs der Hysteresisschleife bis \mathfrak{B}_1' , der die Feldstärke \mathfrak{H}_3 entspricht. Die zurückgegebene Energie für die Volumeneinheit ist gleich der Fläche $A_1 \mathfrak{B}_1' \mathfrak{B}_2 A_2$, also um das schraffierte Stück kleiner als die zugeführte Energie. Dieser Teil bleibt zurück, er ist in Eisen in Wärme umgewandelt. Bei zyklischer Magnetisierung ist daher die in Wärme umgewandelte Energie bei jedem Zyklus gleich der von der Hysteresisschleife umgrenzten Fläche.

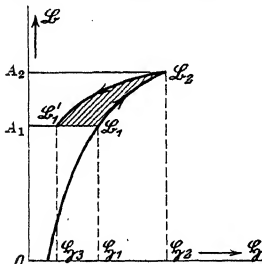


Fig. 122.

$$a_h = \int_0 \mathfrak{H} d\mathfrak{B} \text{ Joule/cm}^3 \quad (184)$$

ist die Hysteresisarbeit für einen Zyklus und 1 cm^3 , wo \mathfrak{H} in Amp./cm, \mathfrak{B} in Voltsek./cm² gemessen sind.

4. Magnetisierung mit Wechselstrom.

Wird die Spule des Eisenringes (Fig. 119) an eine Wechselspannung angeschlossen, so wird das Eisen durch den Wechselstrom zyklisch ummagnetisiert.

Der Spulenfluß ist sehr angenähert $\Psi = w \Phi$ und

$$p = iR + w \frac{d\Phi}{dt}$$

wobei der Zusammenhang zwischen Φ und i durch die Hysteresisschleife gegeben ist.

Ein angenähertes Bild über den Verlauf des Stromes erhält

man, wenn man iR vernachlässigt, was in vielen Fällen zulässig ist. Dann ist

$$p = w \frac{d\Phi}{dt}.$$

Setzt man eine einwellige Spannung voraus, so ist

$$p = p_m \sin \omega t$$

$$\Phi = \int \frac{p dt}{w} = -\frac{p_m}{\omega w} \cos \omega t = -\Phi_m \cos \omega t,$$

$$\Phi_m = \frac{p_m}{\omega w}$$

ist die Amplitude des einwelligen Flusses. In Fig. 123 ist die Welle des Flusses aufgetragen und zu jedem Wert von Φ der Hysteresisschleife der zugehörige Strom i entnommen. Er hat bei sinusförmiger Spannung eine spitze, stark verzerrte Form. Er ist zur Amplitude des Flusses nicht symmetrisch, und die Nulldurchgänge

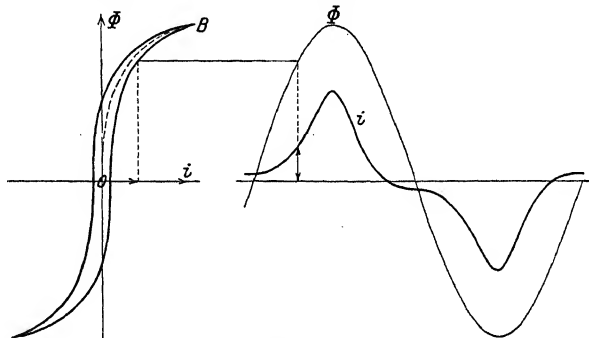


Fig. 123.

der Stromkurve sind wegen der Remanenz gegen die des Flusses voreilend.

Würde die Ummagnetisierung ohne Hysteresis nach der mittleren punktierten Kurve OB in Fig. 123 verlaufen, so erhielte man die symmetrische Stromkurve i_μ (Fig. 124), die mit dem Fluß in Phase ist, die Hysteresis bedingt die um 90° dagegen voreilende Komponente i_h . i_h und i_μ ergeben zusammen die Stromkurve i in Fig. 123.

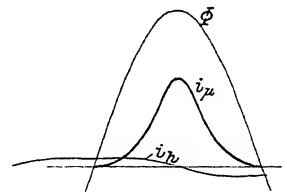


Fig. 124.

Der Magnetisierungsstrom kann also in zwei Komponenten zerlegt gedacht werden, i_μ ist gegen die Spannung um 90° verzögert i_h in Phase mit der Spannung. Das Produkt aus Spannung und i_h stellt den Leistungsverlust durch die Hysteresis dar. Bei f Ummagnetisierungen in der Sekunde ist er für die Volumeneinheit

$$fa_h = f \int_0 \oint \delta d\mathcal{B} \text{ Watt/cm}^3 \dots (185)$$

Bei Ermittlung der Stromkurve waren wir von einer sinusförmigen Spannung $w \frac{d\Phi}{dt}$ ausgegangen. Addiert man zu ihr den Ohmschen Spannungsabfall iR , der ebenso wie der Strom verzerrt ist, so ist die Klemmenspannung nicht mehr sinusförmig. Umgekehrt bewirkt der Ohmsche Spannungsabfall bei sinusförmiger Klemmenspannung, daß $w \frac{d\Phi}{dt}$ und Φ nicht mehr sinusförmig sind. Es zeigt sich, daß $w \frac{d\Phi}{dt}$ spitzer wird, also einen größeren Formfaktor ξ hat als die Sinuskurve. Für eine effektive EMK E ist die Amplitude des Flusses dem Formfaktor ξ umgekehrt proportional

$$\Phi_m = \frac{E}{4fw\xi},$$

Φ_m und der Magnetisierungsstrom werden also bei spitzerer Spannungs-kurve kleiner.

Schaltet man vor die Spule einen Ohmschen Widerstand, so zeigt sich, daß bei gleicher effektiver Spannung an der Spule der Magnetisierungsstrom kleiner geworden ist. Bei sehr hohen Sättigungen, wie sie bei Transformatoren besonders für kleine Periodenzahlen (15) verwendet werden, zeigt sich diese Erscheinung schon bei kleinen Vorschaltwiderständen (Strommesser und Wattmeter).

5. Wirbelströme.

Eine weitere Erscheinung bei der Ummagnetisierung mit Wechselstrom sind die Wirbelströme. Das Wechselfeld induziert im Eisenkern (Fig. 119) Ströme, deren Bahnen im Eisenquerschnitt ähnlich verlaufen wie die Strombahn des Erregerstromes am Rande des Querschnitts. Durch diese Wirbelströme wird das Eisen erhitzt, und um sie klein zu halten, wird der Eisenquerschnitt aus Blechen zusammengesetzt, die durch Papierisolation voneinander getrennt sind.

Für Dynamomaschinen und Transformatoren werden Bleche in Stärken von 0,5 bis 0,3 mm verwendet. Auch bei so feiner Unterteilung werden die Wirbelströme nicht vollständig unterdrückt. Sie wirken auf den Erregerstrom zurück wie der sekundäre Strom eines Transformators auf den primären (s. Kap. IX) und bedingen daher eine Vergrößerung dieses Stromes.

Nach den Versuchen von Gumlich und Rose¹⁾ ist ein Unterschied zwischen der Magnetisierung mit Gleichstrom und der mit Wechselstrom bei Periodenzahlen von 15 bis 50, nur bei Induktionen bis 12000 bis 15000 nachweisbar. Er zeigt sich darin, daß

¹⁾ ETZ 1905, S. 503 ff.

bei gleicher Feldstärke die Induktion bei Wechselstrom etwas kleiner ist als bei Gleichstrom.

Die Unterschiede sind aber sehr klein und verschwinden bei höherer Sättigung ganz. Bei hohen Periodenzahlen äußert sich dagegen die Rückwirkung der Wirbelströme in größerem Maße.

6. Magnetisierung bei Mehrphasenströmen.

Die spitze Kurve des Magnetisierungsstromes nach Fig. 123 und 124 enthält eine sehr große dritte Oberwelle. Die Kurve i_μ in Fig. 124 hat die Gleichung

$$i = 100 \sin x - 40 \sin 3x + 10,1 \sin 5x - 3,46 \sin 7x + \dots$$

Die Amplitude der dritten Oberwelle ist also 40% von der Grundwelle, bei höheren Sättigungen kann sie noch größer werden.

Schaltet man die Erregerspulen von drei magnetischen Kreisen in Sternschaltung an ein Dreiphasennetz (s. Fig. 125), so kann nach Kap. VIII die dritte Oberwelle des Stromes nicht fließen. Die Folge davon ist, daß der Fluß in jedem der drei magnetischen Kreise nicht mehr sinusförmig sein kann, er erhält eine starke dritte Oberwelle, wodurch eine Spannung von dreifacher Periodenzahl nebst Oberwellen entsteht. In den (verketteten) Linienspannungen heben sich diese Spannungen von dreifacher Periodenzahl wieder heraus.

Man kann sie getrennt erhalten, wenn man um die drei Kerne je eine Prüfspule a in Fig. 125 legt und diese drei Spulen hintereinanderschaltet. Die Grundwellen der Spannungen sind um 120° phasenverschoben und ergeben als Summe Null, die Oberwellen von dreifacher Periodenzahl sind gleichphasig und addieren sich.

Da sich die Effektivwerte der Oberwellen quadratisch addieren, werden die Effektivwerte der Grundwellen der Phasenspannung und des Flusses nur wenig kleiner als die Effektivwerte der resultierenden Wellen. Der Fortfall der von der dritten Oberwelle herrührenden Spitze des Magnetisierungsstromes bedingt, daß die Grundwelle des flacheren Stromes sowie die anderen Oberwellen, 5te usw., entsprechend größer werden, der Effektivwert des Magnetisierungsstromes ist bei gleicher Induktion größer, wenn man die drei Kerne in Sternschaltung mit Dreiphasenstrom erregt, als wenn man jeden für sich mit Einphasenstrom erregt.

Die Oszillogramme (Fig. 126) zeigen den spitzen einphasigen und den flachen dreiphasigen Erregerstrom, die an ein und demselben Induktionsmotor aufgenommen wurden, der eine bei Anschluß

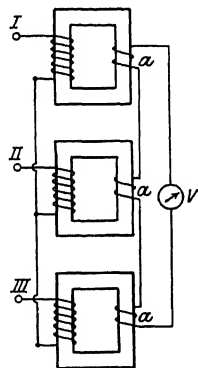


Fig. 125.

aller drei Phasen an ein Dreiphasennetz, der andere bei Unterbrechung einer Phase, so daß die beiden übrigen in Reihenschaltung mit Einphasenstrom erregt waren. In beiden Fällen war die Sättigung gleichgroß; der Effektivwert des dreiphasigen Magnetisierungsstromes war aber um 30% größer als der des einphasigen.

Bei den dreiphasigen Induktionsmotoren und Transformatoren sind die drei Flüsse der einzelnen Phasen nicht wie im Beispiel der Fig. 125 getrennt, sondern, wie Fig. 127 für einen Dreiphasentransformator zeigt, durch die gemeinsamen Joche $J-J$ verkettet. Die Flüsse von dreifacher Periodenzahl sind gleichphasig, d. h. in jedem Augenblick in den drei Kernen gleichgerichtet. In den Jochen

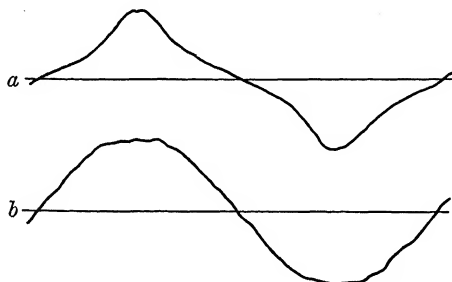


Fig. 126. Magnetisierungsstrom.
a einphasig, b dreiphasig.

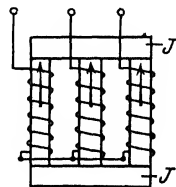


Fig. 127.

wären sie einander entgegengesetzt gerichtet, sie können sich also nicht durch die Joche schließen, sondern sie treten aus den Kernen aus und schließen sich teils durch die Luft, teils durch benachbarte Eisenteile des Gehäuses und verursachen hier und besonders dort, wo sie senkrecht zur Unterteilung aus den Kernen austreten, zusätzliche Wirbelstromverluste. Ist die primäre oder die sekundäre Wicklung in Dreieck geschaltet, so fließt in dem Dreieck ein Strom von dreifacher Frequenz als Ringstrom, der den Fluß von dreifacher Frequenz stark dämpft.

7. Berechnung des effektiven Erregerstromes.

Für praktische Zwecke ist die Kenntnis des effektiven Erregerstromes, am wichtigsten, weil dieser gemessen wird. Ist schon die Form des Stromes unsicher zu bestimmen, so gilt dies ebenfalls von dem Effektivwert. Man erkennt aus den Oszillogrammen Fig. 126, daß bei einphasiger und dreiphasiger Erregung grundsätzlich verschieden verfahren werden muß.

Bei einphasiger Erregung verwendet man am zweckmäßigsten eine dynamische Magnetisierungskurve für die Effektivwerte der Induktion und Feldstärke, die an einem Probering, etwa nach Fig. 119, mit Wechselstrom gemessen werden.

Bei Dreiphasenstrom nähert sich bei nicht allzu hohen Sättigungen der Magnetisierungsstrom viel mehr der Sinusform. Man geht dann besser von der Amplitude der Induktion aus und rechnet mit einer mit Gleichstrom aufgenommenen Magnetisierungskurve. Den Effektivwert des Stromes erhält man durch Division mit dem Scheitelfaktor der Sinuskurve, d. h. mit $\sqrt{2}$.

Aus dem großen Einfluß, den die Form der Spannungskurve bei hohen Sättigungen auf den Magnetisierungsstrom hat, erkennt man, daß selten eine gute Übereinstimmung zwischen berechnetem und gemessenem Strom zu erwarten ist, ein Umstand, der häufig den Stoßfugen in den Blechen zugeschrieben wird, deren Wirkung aber gegen die hier erörterten Einflüsse meist verschwindet.

59. Verluste im Eisen.

1. Berechnung der Verluste durch Hysteresis.

Die Leistung, die durch Hysteresis in Wärme umgesetzt wird, ist nach Gl. (185) $f \cdot a_h$, worin a_h die Hysteresisarbeit für einen Zyklus und 1 ccm, proportional dem Inhalt der Hystereseschleife ist.

Nach einem empirischen Gesetz von Steinmetz ist der Hysteresisverlust proportional der 1,6^{ten} Potenz der maximalen Induktion

$$N_h = \eta \cdot f \cdot B_m^{1,6} V \dots \dots \dots (186)$$

Setzt man das Volumen V in ccm ein, die Induktion B in 10^{-8} Voltsek./cm² (abs. Einh.), so wird

$$N_h = \sigma_h \left(\frac{f}{100} \right) \left(\frac{B}{1000} \right)^{1,6} V \text{ Watt} \dots \dots \dots (187)$$

Der Hysteresiskoeffizient σ_h beträgt für Dynamoblech $\sigma_h = 0,6$ bis 0,95.

2. Stromwärme der Wirbelströme.

Bei kleinen Frequenzen ist die Rückwirkung der Wirbelströme auf das Feld gering und folgende angenäherte Rechnung gibt ein Bild von den Verlusten.

In einem ebenen Blech Fig. 128 sei die Richtung der Induktion senkrecht zum Querschnitt und überall gleichgroß. Die Wirbelstromfäden ver-



Fig. 128.

laufen parallel zu den Längsseiten symmetrisch zur Mittellinie. Ist die Plattendicke Δ klein und die Ausdehnung der Platte groß, so ist die Induktion B in der Richtung der Blech-

dicke vernachlässigt werden. Eine rechteckige Schleife von 1 cm Länge, die von Stromfäden im Abstand x symmetrisch zur Mittellinie begrenzt wird, umschließt einen Fluß

$$\Phi_x = 2 x B_m.$$

Die effektive EMK ist

$$e_x = 4 f \xi B_m 2 x \text{ Volt},$$

der Widerstand für 1 cm Blechtiefe unter Vernachlässigung der kurzen Seiten $R_x = \frac{2 \varrho}{dx}$, daher der Verlust

$$\frac{e_x^2}{R_x} = \frac{16}{\varrho} f^2 \xi^2 B_m^2 2 x^2 dx \text{ Watt.}$$

Integriert man von $x=0$ bis $x=\frac{\Delta}{2}$, und dividiert durch das Volumen Δ , so erhält man für 1 ccm

$$N_w = \frac{4}{3} \frac{f^2}{\varrho} \xi^2 B_m^2 \Delta^2 \text{ Watt.} \quad \dots \quad (188)$$

Diese Leistung ist proportional den Quadraten der Induktion der Periodenzahl, der Blechdicke und des Formfaktors, dagegen dem spez. Widerstand umgekehrt proportional.

Setzt man Δ in mm, das Volumen V in cdm, B in 10^{-8} Voltsek./cm² so wird

$$N_w = \sigma_w \left(\Delta \frac{f}{100} \frac{B_m}{1000} \xi \right)^2 V \text{ Watt,} \quad \dots \quad (189)$$

worin der Koeffizient

$$\sigma_w = \frac{4}{3} \frac{1}{\varrho} 10^{-5} \text{ ist.}$$

Für Schmiedeeisen ist $\varrho \cong 10^{-5}$ Ohm für 1 ccm, daher

$$\sigma_w = 1,33.$$

Die neuerdings verwendeten siliziumhaltigen (2 bis 4%) sog. legierten Bleche haben einen spez. Widerstand von etwa

$$\varrho = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm für 1 ccm.}$$

Der Koeffizient σ_w ist hierfür 5mal so klein. Auch die Hysteresisverluste sind bei legierten Blechen etwas kleiner als bei gewöhnlichen Blechen.

Die Permeabilität der legierten Bleche ist bei kleinen Induktionen etwas höher, bei großen niedriger als bei gewöhnlichen Blechen.

Bei hohen Periodenzahlen bedingen die Wirbelströme eine Verdrängung der Induktionslinien an den Rand des Bleches, eine analoge Erscheinung zu der Stromverdrängung in massiven Leitern. Nach J. J. Thomson¹⁾ ist für eine ebene Platte von der Dicke Δ cm

¹⁾ The Electrician, Bd. 28, 1892, S. 599.

in der die Induktion senkrecht zur Blechdicke verläuft, im Abstand x von der Mittelebene, wenn B die Induktion am Blechrand ist,

$$\frac{B_x}{B} = \sqrt{\frac{\cos^2 kx + \cos 2kx}{\cos^2 k\Delta + \cos 2k\Delta}}, \quad \dots (190)$$

worin

$$k = \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\rho 10^9}}$$

ist. Die Permeabilität μ ist hierin konstant gesetzt. Für $\rho = 10^{-5}$ und $\mu = 2000$ zeigt Fig. 129 die Verteilung der Induktion in einem Blech von 0,5 mm Dicke bei 100 und 1000 Perioden i. d. Sek. Im ersten Fall ist die Abweichung in der Mitte nur 2% von der maximalen, im zweiten Fall ist die Induktion in der Mitte nur 43% von der am Rande.

Auch bei kleinen Periodenzahlen sind die tatsächlichen Eisenverluste meist größer als die nach Formel 189 berechneten, erstens, weil die Induktion nicht gleichmäßig über den Querschnitt des ganzen Blechpaketes verteilt ist, zweitens, weil bei der Bearbeitung die Isolation zwischen den Blechen beschädigt wird und leitende Brücken hergestellt werden, endlich weil bei Stoßfugen, Übergängen, ein Teil des Flusses senkrecht zur Lamellierung aus den Blechen austritt, wodurch die Verluste wesentlich steigen. Auch die Streuflüsse, die in benachbarte massive Konstruktionsteile eintreten, verursachen Verluste, die man alle als zusätzliche Verluste bezeichnet.

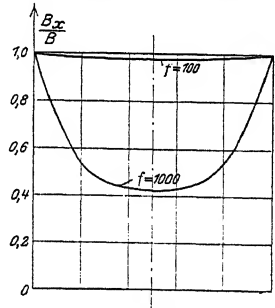


Fig. 129.

Verlustziffer.

Man kennzeichnet die Qualität des Eisens durch eine Verlustziffer, die den gesamten Verlust für 1 kg Eisen bei 50 Perioden und 30°C bei einer bestimmten Induktion angibt. Nach den Vorschriften des V. d. E. ist die Verlustziffer bei $B_m = 10000$ (V_{10}) und bei $B_m = 15000$ (V_{15}) CGS. anzugeben.

Das spez. Gewicht wird, wenn nicht besonders bestimmt, für gewöhnliche Bleche zu 7,7, für legierte zu 7,5 angenommen.

Mit den angegebenen Konstanten $\sigma_h = 0,8$, $\sigma_w = 1,3$ wird für Eisenblech von $\Delta = 0,5$ mm für $B_m = 10000$, $f = 50$ Persek⁻¹

$$V_{10} = 0,8 \cdot 0,5 \cdot 10^{1,6} \frac{1}{7,7} + 1,3 \cdot (0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,11 \cdot 10)^2 \frac{1}{7,7} = 3,4 \text{ Watt/kg,}$$

für ein legiertes Blech mit $\sigma_h = 0,6$, $\sigma_w = 0,27$

Untersuchung und Trennung der Eisenverluste.

Von den verschiedenen Apparaten zur Untersuchung der Eisenverluste in Blechen, die von Epstein¹⁾, Möllinger²⁾, Richter³⁾ angegeben sind, ist der erste z. Z. am meisten verwendet.

Hierbei werden vier Blechpakete aus Streifen von 50 cm Länge, 3 cm Breite und 3 cm Pakethöhe zu einem quadratischen Rahmen zusammengesetzt und an den Ecken mit kräftigen Klammern zusammengestoßen. Jedes Paket ist mit einer Spule versehen, die in Reihe an eine möglichst sinusförmige Spannung angeschlossen werden. Aus Spannung P und Periodenzahl f bestimmt man die Amplitude der Induktion

$$B_m = \frac{\sqrt{2} P}{2 \pi f w Q}.$$

Schaltet man vor die Spule einen Leistungsmesser, so ist von der gemessenen Leistung zunächst der Stromwärmeverlust $J^2 R$ in der Erregerwicklung abzuziehen, um die Eisenverluste zu erhalten. Da diese Korrektur groß ist, wird die Messung genauer, wenn die Pakete eine zweite Wicklung von gleicher Windungszahl wie die Erregerwicklung erhalten. In beiden Wicklungen wird dieselbe EMK induziert; an die zweite Wicklung wird nur die Spannungsspule des Wattmeters (und evtl. das Voltmeter) angeschlossen, während

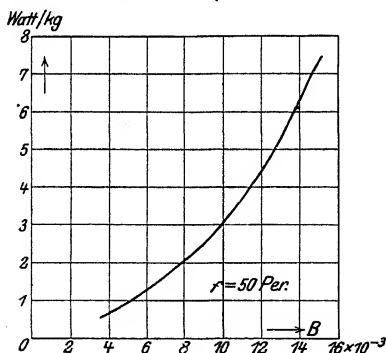


Fig. 130.

die Stromspule im Erregerstromkreis liegt. Die nun gemessene Leistung ist gleich den Eisenverlusten vermehrt um den kleinen Verlust in der Spannungsspule des Wattmeters und im Voltmeter, die sich leicht berechnen und abziehen lassen.

Trägt man die Eisenverluste für konstante Periodenzahl als Funktion der maximalen Induktion auf, so erhält man die nicht ganz quadratisch ansteigende Kurve Fig. 130.

Die Trennung der Verluste in Hysterisis- und Wirbelstromverluste beruht auf deren Abhängigkeit von der Periodenzahl.

Ändert man Spannung und Periodenzahl in gleichem Maße, so bleibt die maximale Induktion konstant. Da die Hysterisisverluste der Periodenzahl f , die Wirbelstromverluste dem Quadrat von f proportional sind, ist der gesamte Verlust bei konstanter Induktion:

$$N = N_h + N_w = k_1 f + k_2 f^2.$$

¹⁾ ETZ 1900, S. 303, s. auch Gumlich u. Rogowski ETZ 1912.

²⁾ ETZ 1901, S. 379.

Daher ist

$$\frac{N}{f} = \frac{N_h}{f} + \frac{N_w}{f} = k_1 + k_2 f.$$

$\frac{N}{f}$ stellt als Funktion der Periodenzahl eine gerade Linie (Fig. 131) dar; ihr Schnitt mit der Ordinatenachse ($f=0$) ergibt die Ordinate $k_1 = \frac{N_h}{f}$ den Hysterese-verlust pro Periode. Der Abstand der Geraden von einer Parallelen zur Abszissenachse durch den Schnittpunkt mit der Ordinatenachse ist $\frac{N_w}{f}$.

Die Gerade biegt bei höheren Periodenzahlen ab, was auf die Schirmwirkung der Wirbelströme zurückgeführt wird.

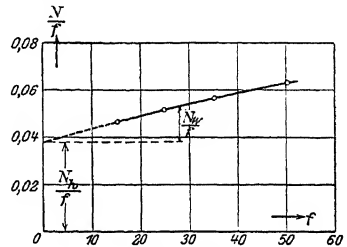


Fig. 131.

60. Die Vektordiagramme des Transformators.

Die technischen Transformatoren besitzen einen geschlossenen magnetischen Kreis aus Eisen, auf den die primäre und sekundäre Spule aufgewickelt sind. Fig. 132 und 133 zeigen die wichtigsten Typen der Einphasentransformatoren, die Kerntype und die Manteltype.

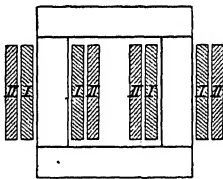


Fig. 132. Kerntransformator.

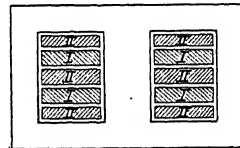


Fig. 133. Manteltransformator.

Im Gegensatz zum Lufttransformator geht man hier nicht von den Koeffizienten L und M aus, die hier nicht konstant sind, sondern von dem Induktionsfluß. Der größte Teil des Flusses verläuft ganz im Eisen und ist mit allen primären und allen sekundären Windungen verkettet.

Dies ist der Hauptfluß Φ . Ihm entsprechen die primär und sekundär induzierten Spannungen

$$e_1 = w_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad e_2 = w_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

Bei unbelasteter Sekundärwicklung entnimmt die primäre dem Netz den Magnetisierungsstrom i_a zur Erregung des Hauptflusses. Da sein Spannungsabfall sehr klein ist, ist e_1 sehr nahe gleich der primären Klemmenspannung. Das Verhältnis der Spannungen bei offener Sekundärwicklung ist sehr nahe gleich dem Übersetzungsverhältnis $w_1:w_2$.

Ist die Sekundärwicklung auf einen Belastungswiderstand geschlossen, so muß, damit der Hauptfluß bestehen bleibt, die Summe der primären und sekundären Durchflutungen wieder die Erregung des Hauptflusses ergeben.

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 = i_a w_1.$$

Setzen wir

$$i_1 = i_a - i_2 \frac{w_2}{w_1} = i_a + i_2', \quad \dots \dots (192)$$

so folgt: der primäre Strom i_1 setzt sich zusammen aus dem Magnetisierungsstrom i_a und dem primären Belastungsstrom i_2' , der entgegengesetzt gleich dem auf die primäre Windungszahl reduzierten sekundären Strom ist. Aus Gl. 191 und 192 folgt

$$e_1 i_2' = -e_2 i_2.$$

Der sekundär abgegebenen Leistung $-e_2 i_2$ entspricht eine gleich große primär aufgenommene Leistung $e_1 i_2'$.

Die Gleichungen gelten für die Momentanwerte also unabhängig von der Kurvenform.

Die Streuflüsse der beiden Wicklungen verlaufen nur teilweise im Eisen und schließen sich um die Spulen durch die Luft. Sie sind teils nur mit primären oder sekundären Windungen verkettet, teils mit beiden (einfach und doppelt verkettete Streulinien).

Da die Streuflüsse längere Luftstrecken durchlaufen, sind sie den Strömen proportional, die Kraftlinienwindungen können durch Streuinduktivitäten S_1 und S_2 ausgedrückt werden (s. S. 134). Es gelten daher die folgenden Gleichungen für den Transformator:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= i_1 R_1 + w_1 \frac{d\Phi}{dt} + S_1 \frac{di_1}{dt} \\ 0 &= p_2 + i_2 R_2 + w_2 \frac{d\Phi}{dt} + S_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots (193)$$

Für einwillige Größen können diese Gleichungen durch ein Vektordiagramm der Effektivwerte dargestellt werden.

Man ersetzt hierbei den verzerrten Magnetisierungsstrom durch seinen äquivalenten Sinusstrom.

In Fig. 134 ist Φ der Vektor des Hauptflusses, E_1 um 90° dagegen voreilend ist die Komponente der primären Klemmenspannung, die der EMK $-E_1$ entgegengesetzt gleich ist. Die sekundäre EMK $-E_2$ ist gegen Φ um 90° verzögert, bei Reduktion auf die primäre Windungszahl ist sie numerisch gleich E_1 .

Der äquivalente Magnetisierungsstrom J_a eilt gegen Φ um $(90^\circ - \psi_a)$ vor, gegen E_1 um ψ_a nach. Seine Komponente $J_a \cos \psi_a$ entspricht einer Leistung, es ist $E_1 J_a \cos \psi_a$ der Eisenverlust. Der auf die primäre Windungszahl reduzierte Sekundärstrom ist J_2 , und der primäre Strom J_1 ist die Summe aus J_a und $(-J_2) = J_2'$.

Subtrahiert man von $-E_2$ die Ohmschen und induktiven Spannungsabfälle $J_2 R_2$ und $J_2 \omega S_2 = J_2 X_{s2}$, so erhält man die sekundäre Klemmenspannung P_2 ; addiert man zu E_1 $J_1 R_1$ und $J_1 \omega S_1 = J_1 X_{s1}$, so ergibt sich die primäre Klemmenspannung P_1 .

Da

$$\angle(E_1 J_2') = \angle(-E_2 J_2) = \psi_2$$

und

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2}, \quad \frac{J_2'}{J_2} = \frac{w_2}{w_1},$$

wird

$$E_1 J_2' \cos \psi_2 = -E_2 J_2 \cos \psi_2.$$

Dies ist die vom primären auf den sekundären Stromkreis übertragene Leistung.

Dreht man das sekundäre Spannungsdreieck um Punkt O um

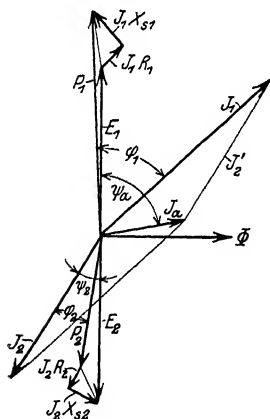


Fig. 134.

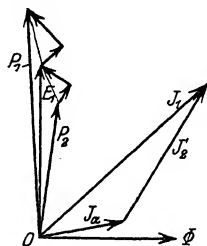


Fig. 135.

180° , so daß E_1 und $-E_2$ zusammenfallen, so erhält man Fig. 135, die ein anschauliches Bild von der Verschiebung und Abnahme des Spannungsvektors von P_1 bis P_2 gibt. Sie ist bedingt durch den Ohmschen Spannungsabfall und die Streuung der beiden Wicklungen.

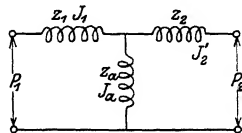


Fig. 136.

Dieses Diagramm und die Gl. 193 gelten auch für andere Stromkreise, z. B. für den Induktionsmotor, bei dem an Stelle der elektrischen Belastung des Transformators eine mechanische Belastung tritt.

Sie gelten auch für das Schema Fig. 136, wenn wir an den sekundären Klemmen mit der Spannung P_2 den Belastungsstrom fließend denken. Der Zweig z_a entspricht den vom Hauptfluß in Primär- und Sekundärwicklung induzierten (bei Reduktion auf gleiche Windungszahl) gleichgroßen EMKen, er führt den Magnetisierungs-

$$z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega S_1)^2} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{R_2^2 + (\omega S_2)^2}$$

sind die Scheinwiderstände der primären und sekundären Wicklung

Fig. 136 ist der Ersatzstromkreis des Transformators. Er wird in Kap. XII eingehend behandelt.

61. Das magnetische Feld einer Maschine mit verteiltem Eisen

Die Maschine besteht, s. Fig. 137, aus einem zylindrischen, unipolaren, drehbaren, Läufer L und einem Ständer S , die aus Blechen zusammengesetzt sind. Ständer und Läufer sind durch einen Luftraum von konstanter Länge getrennt. Auf dem Ständer ist eine Wicklung in Nuten eingebettet. Wird sie von einem konstanten Strom durchflossen, dessen Richtung durch Punkte und Kreuze angedeutet ist, so entsteht ein Induktionsfluß in der durch Pfeile bezeichneten Richtung, er durchsetzt das Ständer- und Läuferisen und den Luftraum. Wo er aus dem Ständerisen austritt, bildet sich ein Nordpol, wo er eintritt, ein Südpol aus. Weil die Wicklung zwei Pole erzeugt, heißt sie eine zweipolige Wicklung, und zwar ist sie eine zweipolige Trommelwicklung.

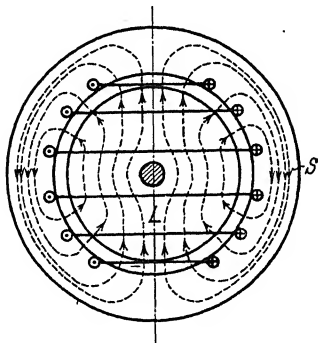


Fig. 137.

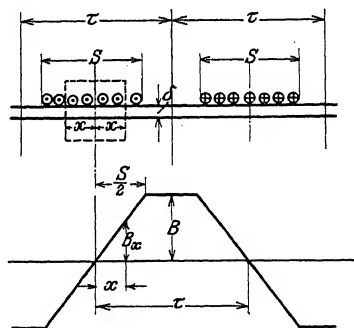


Fig. 138.

Man bezeichnet den Teil des Umfangs, der einen Pol umfaßt als eine Polteilung, hier ist es der halbe Umfang.

Durch entsprechende Anordnung der Wicklung lassen sich 4, 6, 8 ... allgemein $2p$ Pole erzeugen, worin p die Polpaarzahl ist. Die Wicklung heißt dann mehrpolig und die Polteilung ist der $2p$ te Teil des Umfangs.

Die Verteilung des Induktionsflusses ergibt sich wie folgt. In Fig. 138 ist der Umfang abgewickelt. Die Drähte einer Spule liegen gleichmäßig verteilt symmetrisch zur Mittellinie der Polteilung τ auf einem Bogen S . Die Mittellinie ist die neutrale Zone des Feldes. In Punkten gleichen Abstandes x zu beiden Seiten von ihr ist die Feldstärke gleich groß, aber von entgegengesetzter Richtung. Für

eine Induktionslinie, die den Luftraum im Abstand x zu beiden Seiten der neutralen Zone durchsetzt kann unter Vernachlässigung der magnetischen Spannung des Eisenweges, die Umlaufspannung gleich der Spannung des Luftraumes gesetzt werden.

$$\int H ds = H_x 2\delta.$$

H_x ist die Feldstärke im Luftraum an der Stelle x , δ die Länge des Luftraumes.

Auf der Breite S liegen Jw Amperedrähte, die betrachtete Induktionsröhre ist von einem Teil davon $2x:S$ durchflutet. Daher ist

$$H_x 2\delta = Jw \frac{2x}{S},$$

$$B_x = \mu_0 H_x = \mu_0 \frac{Jw x}{\delta S}.$$

Dies gilt von $x=0$ bis $x=\frac{1}{2}S$.

Ist $2x > S$, so ist die Durchflutung Jw und

$$B_x = \mu_0 \frac{Jw}{2\delta}.$$

Trägt man B_x als Ordinate auf, so erhält man die Induktionsverteilung als ein Trapez mit der Höhe

$$B = \mu_0 \frac{Jw}{2\delta} \quad \dots \quad (194)$$

Der Inhalt dieser Feldkurve ist der Induktionsfluß für 1 cm Länge des Eisens. Ist die Länge l cm, so ist

$$\Phi = \int_0^{\tau} B_x l dx.$$

Da die Grundlinien des Trapezes τ und $\tau - S$ sind, die Höhe B ist, wird

$$\Phi = Bl\tau \left(1 - \frac{S}{2\tau}\right) = Bl\tau\alpha \quad \dots \quad (195)$$

$\alpha = 1 - \frac{S}{2\tau}$ heißt der Füllfaktor. Für konstante Induktionsverteilung, d. h. für ein Rechteck wäre $\alpha = 1$.

Das Trapez nähert sich einer Sinuskurve am meisten, wenn (s. Kap. VII, S. 79) $\frac{S}{2} = \frac{\tau}{3}$, oder $S = \frac{2}{3}\tau$ ist. Die Grundwelle des Trapezes hat hierfür nach S. 79 die Gleichung

$$B = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} B \sin \frac{x}{\pi}.$$

Die Amplitude ist also

$$B_1 = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} B,$$

der Fluß der Grundwelle

$$\Phi_1 = \frac{2}{\pi} B_1 \tau l = \frac{12}{\pi^3} \sqrt{3} B \tau l,$$

der des Trapezes

$$\Phi = \frac{2}{3} B \tau l.$$

Es verhält sich also $\Phi_1 : \Phi = \frac{18}{\pi^3} \sqrt{3} = 1,005$, sie unterscheiden sich nur um 0,5 %, so daß man häufig mit der sinusförmigen Grundwelle rechnet.

Wird das Feld durch einen Wechselstrom erregt, so pulsiert die Induktion an jeder Stelle mit dem Strom.

Bezeichnet B die räumliche Amplitude einer sinusförmig verteilten Feldkurve, B_m ihre zeitliche Amplitude, so ist die zeitliche Amplitude im Abstand x von der neutralen Zone

$$B_{xm} = B_m \sin \frac{x}{\tau} \pi$$

und der Augenblickswert an der Stelle x für zeitlich sinusförmige Pulsation

$$B_x = B_{xm} \sin \omega t = B_m \sin \frac{x}{\tau} \pi \sin \omega t \quad . \quad . \quad (196)$$

62. Erzeugung eines Drehfeldes.

Sind am Umfang der Maschine zwei um eine halbe Polteilung gegeneinander versetzte Spulen angebracht, so erzeugen sie zwei um ebensoviel gegeneinander verschobene Felder. Bei der zweipoligen Anordnung steht die Verbindungslinie der Mitten des Nord- und des Südpoles, die „Polachse“ eines Feldes, senkrecht auf der des anderen, bei der mehrpoligen Maschine sind sie um $\frac{90}{p}$ Grade verschoben. Man spricht auch hier von einer Verschiebung um 90° , und bezeichnet diese als „elektrische Grade“, die Polteilung umfaßt 180° elektrische Grade.

Sind die um 90° räumlich verschobenen Felder sinusförmig verteilt und mit I und II bezeichnet, so sind ihre räumlichen Verteilungen

$$B_{Ix} = B_I \sin \frac{x}{\tau} \pi,$$

$$B_{IIx} = B_{II} \sin \left(\frac{x}{\tau} \pi - \frac{\pi}{2} \right) = -B_{II} \cos \frac{x}{\tau} \pi.$$

Die positive räumliche Amplitude B_I liegt also bei $x = \frac{\tau}{2}$, B_{II} bei $x = \tau$.

Sind die Felder von Zweiphasenstrom erregt, und nehmen wir an, daß das zweite Feld $\frac{1}{4}$ Periode später seine Amplitude erreicht, als das erste, so wird, wenn die zeitlichen Amplituden wieder mit dem Index m bezeichnet werden.

$$B_{Ix} = B_{Im} \sin \frac{x}{\tau} \pi \sin \omega t$$

$$B_{IIx} = -B_{Im} \cos \frac{x}{\tau} \pi \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = B_{Im} \cos \frac{x}{\tau} \pi \cos \omega t.$$

Sind die Amplituden gleichgroß,

$$B_{Im} = B_{IIm},$$

so ist an einer Stelle x die von beiden Feldern resultierende Induktion

$$\begin{aligned} B_x &= B_{Ix} + B_{IIx} = B_m \left(\sin \frac{x}{\tau} \pi \sin \omega t + \cos \frac{x}{\tau} \pi \cos \omega t \right) \\ &= B_m \cos \left(\omega t - \frac{x}{\tau} \pi \right) \dots \dots \dots (197) \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt eine fortschreitende Welle dar. Nach einer Zeit dt ist die Induktion an einer Stelle $(x + dx)$

$$B_m \cos \left[\omega (t + dt) - (x + dx) \frac{\pi}{\tau} \right].$$

Sie hat wieder denselben Wert wie zur Zeit t an der Stelle x , wenn

$$\omega dt = dx \frac{\pi}{\tau}$$

st. Hieraus ergibt sich, daß die ganze Welle mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega \tau}{\pi} = \frac{2\tau}{T}$$

wandert, d. h. die Welle legt in einer Periode T die doppelte Polteilung zurück. Zwei zeitlich und räumlich um 90° gegeneinander verschobene Wechselfelder von sinusförmiger Verteilung setzen sich zu einem mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitenden sinusförmigen Feld von gleicher Größe zusammen. Ein solches Feld heißt ein Drehfeld.

Wir fanden die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ positiv, d. h. das Drehfeld wandert in Richtung der positiven x . Dies ist die Richtung, in der wir von der positiven räumlichen Amplitude B_I zu der des zeitlich nacheilenden Feldes B_{II} gelangten. Hätte man B_{II} als das voreilende Feld bezeichnet, so hätte man das negative Vorzeichen gefunden.

Das Drehfeld wandert also von dem zeitlich voreilenden zum zeitlich nacheilenden Feld. Durch Vertauschung der zeitlichen Reihenfolge der Wechselfelder ändert sich die Drehrichtung.

Stellt man die Felder als Vektoren in einem Zeitdiagramm dar, und soll die positive Richtung der Vektoren auch gleichzeitig die positive räumliche Richtung der Felder darstellen, so ist die Drehrichtung des Drehfeldes, das vom zeitlich voreilenden zum zeitlich nacheilenden Feld wandert, entgegengesetzt der Drehrichtung der Vektoren, also gleich der Zeitlinie (s. Fig. 139).

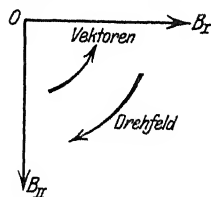


Fig. 139.

Ganz analog setzen sich n um $\frac{2\pi}{n}$ zeitlich und räumlich verschobene Wechselfelder von gleicher Größe zu einem Drehfeld zusammen. Die Summe lautet

$$\begin{aligned} B_x &= B_{1x} + B_{2x} + \dots + B_{(n-1)x} + B_{nx} \\ &= B_m \left[\sin \frac{x}{\tau} \pi \sin \omega t + \sin \left(\frac{x}{\tau} \pi - \frac{2\pi}{n} \right) \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin \left(\frac{x}{\tau} \pi - 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \sin \left(\omega t - 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. \dots \right. \\ &\quad \left. + \sin \left(\frac{x}{\tau} \pi - (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \sin \left(\omega t - (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren bringt man jedes Glied auf die Form

$$\frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{x}{\tau} \pi - \omega t \right) - \cos \left(\frac{x}{\tau} \pi + \omega t - 2z \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right],$$

wobei in der zweiten Kosinus-Funktion z der Reihe nach alle ganzen Zahlen von 0 bis $(n-1)$ durchläuft. Die Summe dieser n Glieder ist Null; da die ersten Glieder alle gleichgroß sind, wird

$$B_x = \frac{n}{2} B_m \cos \left(\frac{x}{\tau} \pi - \omega t \right) \dots \dots \dots (198)$$

Das durch Zusammensetzung von n Wechselfeldern entstehende Drehfeld ist $\frac{n}{2}$ mal so groß wie jedes Wechselfeld.

63. Energieübertragung durch das Drehfeld.

Um durch ein Drehfeld Energie zu übertragen, wird eine Maschine nach Fig. 137 am Ständer und am Läufer mit je einer Mehrphasenwicklung versehen. Eine solche Maschine ist eine Drehfeldmaschine.

Die Ständerwicklungen seien an ein Mehrphasennetz mit n_1 Phasen angeschlossen, der Läufer stehe still und die Läuferwicklung sei noch offen. Die Netzspannung bedingt in jeder

Phase der Ständerwicklung einen Wechselfuß, und die n_1 räumlich und zeitlich um $\frac{2\pi}{n_1}$ gegeneinander verschobenen Flüsse setzen sich zu einem Drehfeld zusammen. Es schreitet in einer Periode T um zwei Polteilungen, d. h. um den p ten Teil des Umfangs fort, macht also

$$u_1 = \frac{1}{Tp} = \frac{f_1}{p} \quad (199)$$

Umläufe in der Sekunde, worin f_1 die Netzfrequenz ist. Das Drehfeld induziert in den n_1 Ständerwicklungen n_1 um $\frac{2\pi}{n_1}$ gegeneinander phasenverschobene EMKe, die bis auf den Spannungsabfall des Magnetisierungsstromes in jeder Wicklung der Phasenspannung entgegengesetzt gleich sind. Im stillstehenden Läufer werden EMKe von gleicher Periodenzahl induziert. Hat der Läufer ebenfalls n_1 Phasen, so bilden die EMKe auch ein n_1 Phasensystem. Die EMKe im Ständer und Läufer verhalten sich wie die Windungszahlen, sie haben aber im allgemeinen verschiedene zeitliche Phasen, je nach der räumlichen Stellung entsprechender Wicklungen des Ständers und Läufers zueinander.

Schließt man die Läuferwicklungen über Belastungswiderstände, die für alle Phasen gleichgroß sind, so entsteht im Läufer ein symmetrisches n_1 -Phasenstromsystem, und die n_1 Ströme erzeugen ein Drehfeld. Damit das der aufgedrückten Ständerspannung entsprechende Feld bestehen bleibt, nimmt der Ständer einen solchen Strom auf, daß die Summe der Durchflutungen des Ständers und Läufers für alle Phasen die Erregung des Hauptflusses ergibt, wie beim gewöhnlichen Transformator, von dem sich die Maschine nur dadurch unterscheidet, daß sie ein Drehfeld besitzt, wodurch primäre und sekundäre EMKe verschiedene zeitliche Phasen haben können. Dies ändert aber an der Wirkungsweise nichts. Denken wir uns den Ständerstrom (Primärstrom) wieder zerlegt in den Magnetisierungsstrom i_a und den primären Belastungsstrom i_2' , so muß, da die n_1 Leistungen

$$E_2 J_2 \cos \psi_2$$

vom Ständer auf den Läufer übertragen werden,

$$n_1 E_2 J_2 \cos \psi_2 = n_1 E_1 J_2' \cos \psi_1$$

sein. Nun sind die EMKe den Windungszahlen direkt, die Ströme ihnen umgekehrt proportional, d. h. es wird

$$n_1 E_2 J_2 = n_1 E_1 J_2'$$

und

$$\cos \psi_1 = \cos \psi_2.$$

verschiebung, wie der sekundäre gegen die seine. Wie also auch E_2 gegen E_1 phasenverschoben sein mag, die Rückwirkung des sekundären Stromes auf den primären Stromkreis ist stets so, als ob sie gleichphasig wären, so daß man für jede Phase dasselbe Vektordiagramm wie für den gewöhnlichen Transformator erhält, das durch Streuung und Ohmschen Widerstand der Wicklungen wie dort ergänzt wird.

Hat der Läufer eine andere Phasenzahl als der Ständer, so ist es möglich, ihm einen symmetrischen n_3 -Phasenstrom zu entnehmen. Da alle Phasen sich gleichmäßig an der Erzeugung des Feldes beteiligen, ist die Rückwirkung auf die primäre Wicklung wieder dieselbe. Die Drehfeldmaschine kann also als Phasenzahlumformer verwendet werden.

Wichtiger ist ihre Anwendung als Periodenumformer.

Dreht sich der Läufer mit u Umläufen i. d. Sek., so ist die Frequenz seiner EMK nicht mehr gleich der primären, $f_1 = p u_1$, worin u_1 die Umlaufzahl des Drehfeldes ist, sondern weil das Drehfeld relativ zum Läufer nur $(u_1 - u)$ Umläufe macht, ist die Periodenzahl

$$f_2 = p(u_1 - u) \quad (199)$$

Hierin erhält u das positive Vorzeichen für gleichsinnige Drehung wie u_1 , das negative für gegenläufige.

Die effektiven EMKe im Ständer und Läufer verhalten sich wie die Produkte aus Windungszahl und Periodenzahl

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{f_2 w_2}{f_1 w_1} = \frac{u_1 - u}{u_1} \frac{w_2}{w_1} \quad (200)$$

Die Läuferströme, die beim Schließen über irgendwelche Widerstände entstehen, haben nun auch die Periodenzahl f_2 . Das Drehfeld, das sie erzeugen, schreitet gegenüber der erzeugenden Läuferwicklung mit

$$\frac{f_2}{p} = u_1 - u \text{ Uml. i. d. Sek.}$$

fort, und da der Läufer sich mit u Umläufen dreht, ist die Umlaufzahl des Drehfeldes im Raum wieder

$$u_1 - u + u = u_1.$$

Die Läuferströme wirken also auf den Ständer wie die einer ruhenden Wicklung zurück. Ständer- und Läuferströme aller Phasen ergeben zusammen die Erregung des Hauptflusses. Zerlegt man J_1 wieder in den Magnetisierungsstrom J_a und den primären Belastungsstrom J_2' , so ist

$$n_1 J_2' w_1 = n_2 J_2 w_2 \quad (201)$$

J_2' hat gegen E_1 dieselbe Phasenverschiebung ψ_2 wie E_2 gegen J_2 , unabhängig von der relativen Phase von E_2 gegen E_1 , wie gezeigt.

Daher wird aus Gl. [200 und 201

$$\frac{n_2 E_2 J_2 \cos \psi_2}{n_1 E_1 J_2' \cos \psi_2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{u_1 - u}{u_1} \quad \dots \quad (202)$$

$n_1 E_1 J_2' \cos \psi_2 = N_a$ ist die vom Ständer (Primärwicklung) auf den Läufer übertragene Leistung. Die vom Läufer (Sekundärwicklung) erzeugte elektrische Leistung $n_2 E_2 J_2 \cos \psi_2 = N_e$ verhält sich zu N_a wie die sekundäre Frequenz zur primären, oder wie die Relativgeschwindigkeit $u_1 - u$ zu der Geschwindigkeit des Drehfeldes u_1 .

Es ist

$$N_e = N_a \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \quad \dots \quad (203)$$

Die Differenz $N_a - N_e$ erscheint in einer anderen Energieform, und zwar als mechanische Leistung N_m , weil das Drehfeld auf die Läuferströme ein Drehmoment ausübt.

Es ist

$$N_m = N_a - N_e = N_a \frac{u}{u_1} \quad \dots \quad (204)$$

Sie verhält sich zu der vom Ständer auf den Läufer übertragenen Leistung, wie die Geschwindigkeit des Läufers zu der des Drehfeldes.

Die mechanische Leistung ist gleich dem Produkt aus Drehmoment D und Winkelgeschwindigkeit des Läufers $2\pi u$,

daher
$$D = \frac{N_m}{2\pi u} = \frac{N_a}{2\pi u_1}.$$

Da die Geschwindigkeit u_1 des Drehfeldes bei gegebener Periodenzahl konstant ist, ist das Drehmoment proportional der vom Ständer auf den Läufer übertragenen Leistung. (Ist N_a in Watt angegeben, so erhält man das Drehmoment in mkg durch Division durch 9,81.)

Während die mechanische Leistung gleich Drehmoment mal Geschwindigkeit des Läufers ist, ist die elektrisch abgegebene Leistung gleich dem Produkt aus Drehmoment und Relativgeschwindigkeit des Läufers zum Drehfeld.

Das Verhältnis der Relativgeschwindigkeit $u_1 - u$ zur Drehfeldgeschwindigkeit u_1 heißt die Schlüpfung

$$s = \frac{u_1 - u}{u_1} = 1 - \frac{u}{u_1} \quad \dots \quad (205)$$

Es ist daher die sekundäre Frequenz

$$f_2 = s f_1,$$

die elektrische Leistung

$$N_e = N_a s,$$

die mechanische Leistung

$$N_m = N_a (1 - s).$$

Es ergeben sich folgende Fälle:

Solange u positiv und kleiner als u_1 ist, ist s positiv und

kleiner als 1. Die elektrische Leistung N_e ist kleiner als die auf den Läufer übertragene, und die mechanische Leistung ist positiv, das Drehmoment ist motorisch. $s=1$, d. h. $u=0$, ergibt den Fall des ruhenden Läufers, bei dem nur elektrische Leistung transformiert wird.

Dreht sich der Läufer ebenso schnell wie das Drehfeld und gleichsinnig, so ist $u=u_1$, $s=0$, der Läufer dreht sich „synchron“ mit dem Drehfeld, dann wird überhaupt keine EMK in ihm induziert und keine Leistung übertragen.

Ist $u > u_1$, d. h. ist die Geschwindigkeit des Läufers größer als die des Drehfeldes, so ist s negativ; das Drehmoment kehrt infolge der Umkehrung der Relativbewegung ($u_1 - u$) seine Richtung um, die mechanische Leistung ist generatorisch und wird dem Läufer durch irgendeine Triebmaschine zugeführt, sie ist größer als N_a , es kehrt sich also der Sinn der Energieübertragung um, die Maschine ist ein Generator.

Eine Drehfeldmaschine kann also zur Umsetzung der Spannung, der Phasenzahl, der Periodenzahl und zur Umsetzung von elektrischer in mechanische Leistung und umgekehrt verwendet werden. Steinmetz bezeichnet sie daher als allgemeinen Transformator.

Ihre häufigste Anwendung ist die des Induktionsmotors, bei dem die Läuferwicklung in sich kurzgeschlossen ist. Die in jeder Phase der Läuferwicklung erzeugte elektrische Leistung ist hier

$$J_2^2 R_2,$$

wenn R_2 der Widerstand der Wicklung ist; sie ist gleich dem Stromwärmeverlust in der Wicklung. Da sie s mal so groß wie die auf den Läufer übertragene Leistung ist, ist diese für eine Phase

$$N_a = \frac{J_2^2 R_2}{s},$$

und die mechanische Leistung ist

$$N_m = J_2^2 R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right).$$

Da das Übersetzungsverhältnis der EMKe gleich dem Verhältnis der Produkte aus Windungszahl und Periodenzahl ist, fällt die

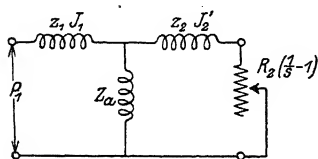


Fig. 140.

sekundäre Periodenzahl bei der Reduktion auf die Primärwicklung in der Stromspannung heraus. Der Induktionsmotor verhält sich wie ein ruhender Transformator, bei dem die mechanische Belastung ersetzt ist durch einen Ohmschen Widerstand $R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$. Es gilt

für ihn daher der Ersatzstromkreis Fig. 140, der in Kap. XII eingehend behandelt wird.

64. Reihenschaltung eines Kondensators und einer Drosselspule mit Eisen.

Nach Kap. II gibt es bei der Reihenschaltung eines Kondensators und einer Drosselspule eine bestimmte Frequenz

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

bei der das magnetische Feld der Drosselspule und das elektrische Feld des Kondensators sich gegenseitig laden, so daß dem Stromkreis keine Blindleistung, sondern nur die zur Deckung der Verluste bei der Aufrechterhaltung des Stromes erforderliche Leistung zuzuführen ist. Der Stromkreis verhält sich wie ein Ohmscher Widerstand, es ist

$$P = JR$$

und die entgegengesetzt gleichen Blindspannungen der Induktivität und der Kapazität betragen

$$J\omega L = \frac{J}{\omega C} = J\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{P}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Besitzt nun die Induktivität einen magnetischen Kreis mit Eisen, so ist L keine Konstante, sondern eine Funktion des Stromes. Aus der Spannungsgleichung

$$p \sin \omega t = Ri + \frac{d\Psi}{dt} + \int i dt,$$

worin $\Psi = f(i)$ durch die Hysteresisschleife dargestellt wird, ist ersichtlich, daß eine strenge Lösung dieses Falles die analytische Darstellung der Hysteresisschleife erforderte. Wir begnügen uns mit einer angenäherten graphischen Untersuchung, die zwar die Verluste und die Verzerrung des Stromes nicht berücksichtigen kann, doch einen genügenden Einblick in die Verhältnisse gewährt,

Resonanzfrequenzen. In Fig. 141 sind die Kraftlinienwindungen Ψ der Drosselspule als Funktion des äquivalenten Sinusstromes J durch die gekrümmte Magnetisierungskurve dargestellt. Für eine Frequenz ω ist die Blindspannung $P_s = \Psi\omega$. Der zu Ψ gehörige Strom J bedingt am Kondensator eine Spannung $P_c = \frac{J}{\omega C}$. Es wird $P_s = P_c$,

wenn

$$\omega = \sqrt{\frac{J}{\Psi C}}$$

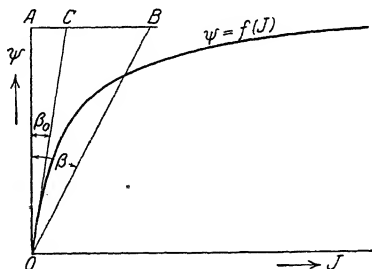


Fig. 141.

ist. Da jedem Punkt der Magnetisierungskurve ein anderes Verhältnis $J: \Psi = \operatorname{tg} \beta$ entspricht, gibt es für eine Kapazität eine unendliche Zahl von Resonanzfrequenzen. Für einen gegebenen Wert C ist $\omega = \operatorname{konst.} \sqrt{\operatorname{tg} \beta}$. Die kleinste Resonanzfrequenz ist die durch den Winkel β_0 der Tangente im Ursprung an die Magnetisierungskurve bestimmte, sie sei ω_0 und

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta_0}} = \sqrt{\frac{AB}{AC}}.$$

Jeder Frequenz entspricht ein bestimmter Strom und eine bestimmte Spannung an Drosselspule und Kondensator. Sie ist

$$P_c = P_s = \Psi \omega = \sqrt{\frac{\Psi J}{C}},$$

d. h. für $C = \operatorname{konst.}$ proportional der Wurzel aus ΨJ , sie wird daher gemessen durch die Seite eines Quadrates, das gleich dem Rechteck

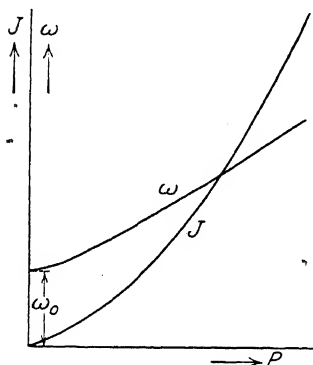


Fig. 142.

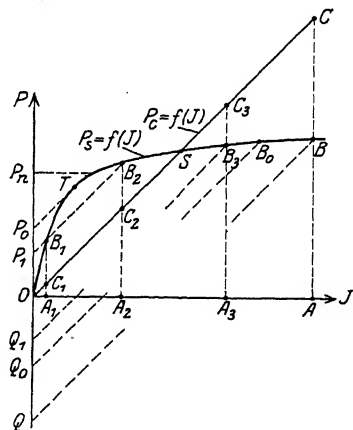


Fig. 143.

aus den Koordinaten der Magnetisierungskurve ist. In Fig. 142 sind ω und J als Funktion der Resonanzspannung P aufgetragen.

Das Verhalten bei konstanter Netzfrequenz und veränderlicher Klemmenspannung. In Fig. 143 sind für konstante Frequenz ω die Charakteristik der Drosselspule $P_s = f(J)$ (Kurve $OB_1B_2B_3$) und die Kondensatorspannung $P_c = f(J)$ (Gerade $OC_1C_2C_3$) dargestellt. Die Ordinatenabschnitte zwischen beiden sind die Blindkomponenten der Netzspannung, oder, wenn man von Verlusten absieht, die Netzspannungen selbst.

Ist $P_s > P_c$, so ist der Strom gegen die Netzspannung verzögert, P_s ist in Phase mit der Netzspannung P , P_c ist ihr entgegengerichtet. Überwiegt dagegen die Kondensatorspannung, ist also $P_c > P_s$, so eilt der Strom der Netzspannung vor, P_c ist gleich-

phasig mit P , P_s entgegengerichtet. Der Übergang ist durch den Schnittpunkt S der beiden Charakteristiken gegeben, wobei $P_s = P_c$ ist und die Netzspannung nur die Verluste zu decken hat. Dies ist der Resonanzpunkt für die Netzfrequenz.

Nun entsprechen unterhalb des Schnittpunktes S , d. h. bei nacheilendem Strom einer Netzspannung P zwei mögliche Gleichgewichtslagen, solange P kleiner ist als der Ordinatenabschnitt zwischen beiden Charakteristiken. Z. B. gehören zur Netzspannung $OP_1 = C_1 B_1 = C_2 B_2$ die Werte

$$\begin{array}{lll} J_1 = OA_1 & P_{s1} = A_1 B_1 & P_{c1} = C_1 A_1 \\ J_2 = OA_2 & P_{s2} = A_2 B_2 & P_{c2} = C_2 A_2 \end{array}$$

B_1 und B_2 sind die Schnittpunkte einer Parallelen durch P_1 zu $P_c = f(J)$. Von diesen beiden möglichen Gleichgewichtslagen stellt sich aber allgemein die mit dem kleineren Strom ein, weil hierbei die Energien und die Verluste kleiner sind.

Fällt die Parallele zur Kondensatorcharakteristik in die Tangente $P_0 T$ an die Charakteristik der Drosselspule, so ist eine Grenzspannung OP_0 erreicht, oberhalb derer ein Betrieb mit nacheilendem Strom überhaupt nicht mehr möglich ist.

Hingegen entspricht bei voreilendem Strom, d. h. rechts von S jeder Netzspannung wieder eine Gleichgewichtslage, die man durch Auftragen von P in die negative Ordinatenachse und die Parallelen zu $P_c = f(J)$ erhält. Die Spannung $OQ_1 = OP_1$ ergibt Punkt B_3 , die Grenzspannung $OQ_0 = OP_0$ Punkt B_0 usw.

Läßt man die Netzspannung von Null anfangend bei konstanter Frequenz wachsen, so nimmt der Strom von Null an zu, und es wird zunächst der Bogen $OB_1 T$ durchlaufen. Steigt die Spannung über die Grenzspannung weiter, so wächst der Strom, da nun nur noch voreilender Strom möglich ist, plötzlich auf den dem Punkt B_0 entsprechenden Wert, wobei die Spannungen am Kondensator und der Drosselspule gleichfalls unter sprunghafter Änderung der Größe ihre Phasenlage gegenüber der Netzspannung umkehren. Dies ist in Fig. 144 dargestellt. Bei weiterer Steigerung der Netzspannung bleibt die Drosselspulen-spannung fast konstant, während der Strom und die Kondensatorspannung stetig steigen.

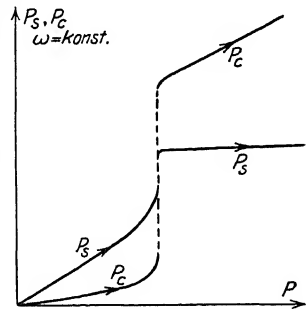


Fig. 144.

Geht man mit der Netzspannung wieder zurück, so bleibt der Zustand auch noch zwischen B_0 und S so lange stabil, als die Verluste durch die Netzspannung gedeckt werden können, dann erfolgt ein sprunghaftes Zurückgehen des Stromes und der Spannung.

Überspannungen mit der Netzfrequenz¹⁾ werden auf die hier beschriebenen Verhältnisse zurückgeführt. In Fig. 145 stellt T einen Transformator am Ende einer Leitung dar. Bei einem Leitungsbruch an der Stelle a und Erdung des gebrochenen Stückes an der Transformatorseite kann der Magnetisierungsstrom des Transformators sich über die Kapazität des ungeerdeten Teiles der gebrochenen Leitung schließen; sie ist durch einen Kondensator C

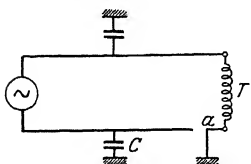


Fig. 145.

dargestellt. War die Netzspannung größer als die Grenzspannung, so stellt sich die Gleichgewichtslage mit voreilem Strom ein, die Transformatorspannung ändert ihre Richtung gegenüber der Netzspannung um fast 180° . An der Leitung tritt eine hohe Überspannung gegen Erde auf. Sie ist um so größer, je näher

der sich einstellende Betriebszustand dem Resonanzpunkt liegt.

Die Änderung der Phasenlage der Spannung z. B. am Transformator gegenüber der Netzspannung nennt man das Kippen der Spannung.

Erfolgt das Kippen an einer Phase eines Dreiphasentransformators, so ergeben sich sekundär 3 um nahezu 60° gegeneinander phasenverschobene Spannungen. Angeschlossene Motoren können dabei ihre Drehrichtung ändern¹⁾.

Das Verhalten bei konstanter Netzspannung und veränderlicher Netzfrequenz kann ebenfalls aus den Spannungscharakteristiken Fig. 143 entnommen werden. Diese gilt zunächst für eine Frequenz ω , für eine andere Frequenz ω' müßten die Ordinaten der P_s -Kurve mit $\frac{\omega'}{\omega}$, die der P_c -Geraden mit $\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)$ multipliziert werden. Es ist aber einfacher, die Charakteristik der Drosselspule unverändert zu lassen und den Maßstab zu ändern. Die Länge für die konstante Klemmenspannung ist dann für die Frequenz ω' mit $\frac{\omega}{\omega'}$ zu multiplizieren, die Ordinaten der P_c -Geraden

mit $\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2$. Bei kleinen Frequenzen liegt die Gerade der Kondensatorspannung steil, bei hohen flach. Bei kleinen Frequenzen ist daher nur ein Betrieb bei voreilem Strom möglich, und die Kondensatorspannung ist fast gleich der Klemmenspannung, die Drosselspulenspannung fast Null. Mit wachsender Frequenz steigen beide Spannungen bis zu einer bestimmten Frequenz, bei der die Netzspannung gerade gleich der Grenzspannung ist. Beim Überschreiten der Frequenz erfolgt das Kippen der Spannungen auf den Betrieb mit nacheilem Strom, beide Spannungen fallen fast

¹⁾ s. Petersen ETZ 1915.

plötzlich ab, P_s überwiegt und P_c wird sehr klein. Die Frequenz, bei der das Kippen eintritt, hängt von der Klemmenspannung ab, je höher diese ist, um so höher liegt auch die kritische Frequenz. Fig. 146 zeigt zwei charakteristische Kurven der Drosselspulen-spannung in Abhängigkeit von der Frequenz, P_{s1} für niedere Klemmenspannung, P_{s2} für hohe, bei dieser ist bis zur doppelten kritischen Frequenz der ersten Kurve das Kippen noch nicht eingetreten. Die Drosselspulen-spannung wächst somit bei konstanter Spannung und veränderlicher Frequenz bei Betrieb mit voreilendem Strom nahezu linear mit der Frequenz, bei veränderlicher Klemmenspannung und konstanter Frequenz bleibt sie, wie oben gezeigt, fast konstant. Hierauf beruht der Frequenzmesser von Martienssen¹⁾, der diese Zusammenhänge zuerst untersucht hat.

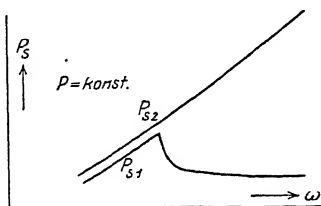


Fig. 146.

¹⁾ ETZ 1910, S. 204.

Elftes Kapitel.

Leitungen mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität.

65. Die Leitungskonstanten. — 66. Strom- und Spannungsgleichungen. — 67. Verlustfreie Leitung. — 68. Leitung mit Verlusten. — 69. Ermittlung der Konstanten einer Leitung durch den Leerlauf- und den Kurzschlußversuch. — 70. Die Leitungskonstanten bei Mehrfachleitungen. — 71. Ersatzschaltungen für Starkstromleitungen. — 72. Kettenleiter.

65. Die Leitungskonstanten.

Wir haben bei der Besprechung von Stromkreisen mit Kapazität bisher nur solche behandelt, bei denen ein Kondensator eingeschaltet ist.

Kapazitätswirkungen, d. h. Ladeströme, treten aber auch bei solchen Stromkreisen auf, bei denen eine Anzahl Leiter, die eine Spannung gegeneinander besitzen, auf eine große Länge hin räumlich einander nahe liegen, also bei Kabeln, langen Fernleitungen, Wicklungen von Maschinen und Transformatoren. Der Verschiebungsstrom verläuft hier zwischen den Leitern und zwischen Leiter und Erde, er ist um so größer, je länger die Leitungen, d. h. je größer die Kapazität und je höher die Frequenz und die Spannungen sind. Bei den niederen Frequenzen der Starkstromtechnik spielt die Kapazität bei hohen Spannungen eine besondere Rolle.

In dem Leiter setzt sich der Verschiebungsstrom als Ladestrom fort. Er führt dem elektrischen Felde, das sich zwischen den Leitern und zwischen Leiter und Erde bildet, Energie zu bzw. von ihm zurück; er besteht unabhängig davon, ob sonst noch Ströme durch den Leiter fortgeleitet werden. In ein Kabel fließt ein Ladestrom, auch wenn an das Ende des Kabels keine Stromverbraucher angeschlossen sind, das Ende offen ist. Sind Stromverbraucher an das Kabel angeschlossen, so wird dem Kabel neben dem Verbrauchsstrom der Ladestrom zugeführt. Es tritt hier die Erscheinung auf, daß der Strom am Anfang des Kabels einen an-

deren Wert hat als am Ende. Der durch die Leitung fließende Strom erzeugt ein magnetisches Feld, dessen Energie mit dem Wechsel der Stromstärke schwingt. Die von dem wechselnden magnetischen Feld bedingten EMKe verursachen eine Änderung der Spannung längs der Leitung, und hierdurch wird wieder bedingt, daß der Ladestrom in den verschiedenen Teilen der Leitung verschiedene Werte besitzt.

Während das elektrische Feld eine Änderung des Stromes längs der Leitung verursacht, bedingt das magnetische Feld eine Änderung der Spannung, beide müssen sich zufolge der Wechselbeziehung stetig ändern.

Die Ausbildung der elektrischen und magnetischen Wechselfelder bedingt bestimmte Verluste.

Der Strom erzeugt Verluste durch Stromwärme im Leiter, und das vom Strom erregte magnetische Feld bedingt Verluste teils im Leiter — Skineffekt — teils durch Wirbelströme in benachbarten Leitern, z. B. im Bleimantel bei Einleiterkabeln. Das elektrische Feld verursacht Verluste im Dielektrikum, die von der Höhe der Spannung abhängen und als dielektrische Hysteresis bezeichnet werden. Von der Spannung bedingt wird auch der Verlust durch unvollkommene Isolation. Bei Freileitungen für hohe Spannungen entstehen Verluste durch Entladungen durch die Luft, die sich z. T. sichtbar als Glimmerscheinungen, die sog. Korona, äußern. Man bezeichnet alle diese Verluste als Ableitungsverluste.

Für eine Leitung sind nun die folgenden charakteristischen Größen zu berücksichtigen.

Die Energie des elektrischen Feldes ist $\frac{1}{2} p^2 C$, worin C die Kapazität der Leitung ist.

Den Energieverlust in der Zeiteinheit durch Ableitung setzt man $p^2 A$ und bezeichnet A als Ableitung.

Die Energie des magnetischen Feldes ist $\frac{1}{2} i^2 L$, worin L die Induktivität ist.

Der Strom bedingt einen Energieverlust in der Zeiteinheit durch Stromwärme $i^2 R$. R ist der (Wirk-)Widerstand der Leitung.

Man hat nun zur rechnerischen Verfolgung die Konstanten C , A , L , R gleichmäßig über die Leitung verteilt zu denken, derart, daß jedes Leitungselement den gleichen Anteil an den Konstanten besitzt, und bezieht diese Konstanten auf das Kilometer als Längeneinheit. Es ist also C die Kapazität pro km, L die Induktivität pro km usw.

66. Strom- und Spannungsgleichungen.

Wir betrachten zunächst eine Schleife, die aus Hin- und Rückleitung besteht (Fig. 147). l sei die einfache Leitungslänge. In einem Element der Schleife von der Länge dx im Abstand x vom Leitungsanfang fließe der Strom i .

Im Abstände x sei p die Spannung zwischen den Leitern, im Abstände $x + dx$ ist sie $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$.

Die Induktivität des Elementes der Schleife ist Ldx , der Widerstand Rdx .

Für das Schleifenelement gilt daher nach dem Induktionsgesetz

$$-Ldx \frac{\partial i}{\partial t} = Rdx i + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) - p,$$

oder

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \dots \dots \dots (206)$$

Die zweite Gleichung liefert die Bedingung der Kontinuität des Stromes. Ist i der eintretende Strom, so tritt als Leitungsstrom

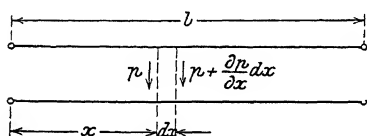


Fig. 147.

$i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ aus; die Differenz des eintretenden und des austretenden Stromes dient als Ladestrom $C dx \frac{\partial p}{\partial t}$

zur Aufladung des Elementes, teils als Ableitungsstrom $A dx p$ zur Deckung der Verluste. Daher ist

$$i = \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + A dx p + C dx \frac{\partial p}{\partial t}$$

oder

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Ap + C \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (207)$$

Gl. 206 und 207 sind die Differentialgleichungen für die räumliche und zeitliche Änderung des Stromes und der Spannung.

Da im stationären Zustand eine einwellige Spannung bei konstanten Werten von L , R , A , C einen einwelligen Strom erzeugt, kann man die Differentialquotienten nach der Zeit durch Anwendung der symbolischen Schreibweise eliminieren und die Gleichungen für die Effektivwerte hinschreiben.

Hierzu setzt man für $\frac{\partial i}{\partial t}$ und $\frac{\partial p}{\partial t}$ nach Kap. III S. 31 $j\omega \Im$ und $j\omega \P$ und erhält

$$-\frac{d\P}{dx} = (R + j\omega L) \Im \dots \dots \dots (208)$$

$$-\frac{d\Im}{dx} = (A + j\omega C) \P \dots \dots \dots (209)$$

Differentiiert man die Gleichungen nochmals nach x , so wird

$$-\frac{d^2 \mathfrak{P}}{dx^2} = (R + j\omega L) \frac{d\mathfrak{S}}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad (210)$$

$$-\frac{d^2 \mathfrak{S}}{dx^2} = (A + j\omega C) \frac{d\mathfrak{P}}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad (211)$$

und durch Einsetzen von Gl. 208 und 209

$$\frac{d^2 \mathfrak{P}}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C) \mathfrak{P} \quad . \quad . \quad . \quad (212)$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{S}}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C) \mathfrak{S} \quad . \quad . \quad . \quad (213)$$

Die Gleichungen sind von gleicher Form, d. h. Strom- und Spannungsverteilung längs der Leitung sind gleichartig und unterscheiden sich nur durch Konstante.

Die Gl. 212 wird befriedigt durch den Ansatz

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{U} e^{\nu x} \quad . \quad . \quad . \quad (214)$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen und \mathfrak{U} und ν zu bestimmende Konstante sind. Durch zweimaliges Differenzieren erhält man aus dieser Gleichung

$$\frac{d^2 \mathfrak{P}}{dx^2} = \nu^2 \mathfrak{U} e^{\nu x} = \nu^2 \mathfrak{P} \quad . \quad . \quad . \quad (215)$$

Setzt man Gl. 215 in Gl. 212 ein, so wird

$$\nu = \pm \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} \quad . \quad . \quad . \quad (216)$$

Entsprechend den beiden Werten von ν besteht das Integral (Gl. 214) aus zwei Teilen; das vollständige Integral lautet:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{U}_1 e^{+\nu x} + \mathfrak{U}_2 e^{-\nu x} \quad . \quad . \quad . \quad (217)$$

Nach Gl. 208 und 217 ist nun

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{(R + j\omega L)} \frac{d\mathfrak{P}}{dx} = \sqrt{\frac{A + j\omega C}{R + j\omega L}} (\mathfrak{U}_2 e^{-\nu x} - \mathfrak{U}_1 e^{\nu x}) \quad . \quad (218)$$

Die Integrationskonstanten \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{U}_2 sind im allgemeinen komplexe Zahlen, sie stellen Spannungsvektoren dar und sind durch die Grenzbedingungen zu ermitteln. Der Exponent ν ist ebenfalls im allgemeinen eine komplexe Zahl, es kann daher gesetzt werden

$$\nu = a + jb.$$

Um a und b zu ermitteln, setzt man für ν den Wert aus Gl. 216 ein

$$\nu^2 = (a + jb)^2 = (R + j\omega L)(A + j\omega C),$$

$$a^2 - b^2 + 2jab = (RA - \omega^2 LC) + j\omega(AL + RC).$$

Indem man die reellen und die imaginären Teile auf beiden Seiten einander gleichsetzt, erhält man die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a^2 - b^2 &= (RA - \omega^2 LC) \\ 2ab &= \omega(AL + RC) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (219)$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen wird

$$(a^2 + b^2)^2 = (R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)},$$

und durch Vereinigung mit Gl. 219

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} [RA - \omega^2 LC + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)}]} \\ b &= \sqrt{\frac{1}{2} [\omega^2 LC - RA + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)}]} \end{aligned} \right\} \quad (220)$$

Setzt man nun in Gl. 217 und 218

$$e^{\pm vx} = e^{\pm (a+jb)x} = e^{\pm ax} e^{\pm jbx},$$

$$e^{\pm jbx} = \cos bx \pm j \sin bx$$

so wird

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{U}_1 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \mathfrak{U}_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)$$

$$\mathfrak{S} = \sqrt{\frac{A + j\omega C}{R + j\omega L}} [\mathfrak{U}_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) - \mathfrak{U}_1 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx)] \quad (221)$$

Jede dieser Gleichungen besteht aus zwei Teilen, deren Bedeutung erst untersucht werden soll. Sieht man zunächst von dem Faktor $e^{\pm ax}$ ab, indem etwa $a=0$ gesetzt wird, so hat jeder Bestandteil die Form

$$\mathfrak{U} (\cos bx \pm j \sin bx).$$

Jeder Vektor \mathfrak{U} stellt eine einwellige Spannung dar, deren Amplitude p_{am} sei, und deren Augenblickswerte daher

$$p_a = p_{am} \sin(\omega t + \psi)$$

sind. Ebenso bedeutet der Vektor $j\mathfrak{U}$, der ebenso groß wie \mathfrak{U} und dagegen zeitlich um eine Viertelperiode voreilt, eine Spannung

$$p_a' = p_{am} \cos(\omega t + \psi).$$

Die Momentanwerte der beiden Glieder der Gl. 221 sind daher

$$p = p_a \cos bx \pm p_a' \sin bx = p_{am} [\sin(\omega t + \psi) \cos bx \pm \cos(\omega t + \psi) \sin bx]$$

$$= p_{am} \sin(\omega t + \psi \pm bx) \quad \dots \dots \dots (222)$$

Diese Funktion stellt für einen gegebenen Augenblick, d. h. für $t = \text{konst.}$, eine räumlich sinusförmige Spannungsverteilung längs der Leitung dar, und an einer bestimmten Stelle ($x = \text{konst.}$) eine zeitlich nach einer Sinusfunktion pulsierende Spannung.

Schreitet der Winkel bx um 2π fort, so hat man sich um eine ganze Wellenlänge λ der räumlichen Sinuswelle fortbewegt. ist daher

$$\lambda = \frac{2\pi}{b} \quad \dots \dots \dots (223)$$

b ist das Winkelmaß.

Nach einer Zeit dt sind die Werte der Funktion (222) an einer jeweils um dx weiterliegenden Stelle der Leitung

$$p_{am} \sin [\omega(t + dt) + \psi \pm b(x + dx)].$$

Diese Werte sind den früheren gleich, wenn

$$\omega dt \pm b dx = 0$$

ist. Dies bedeutet, daß die ganze Welle mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v = \mp \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{b} = f\lambda \quad (224)$$

längs der Leitung fortschreitet, wobei das positive Vorzeichen ein Fortschreiten im Sinne der Zunahme von x , d. h. nach dem Leitungsende, das negative nach dem Leitungsanfang bedeutet. Hiernach stellt sich also die Spannung längs der Leitung in Gl. 221 als Summe, der Strom als Differenz von zwei räumlich sinusförmig verteilten Wellen dar, die mit konstanter Geschwindigkeit, die eine nach dem Leitungsende, die andere nach dem Leitungsanfang wandern. Die erste heißt die Hauptwelle, die zweite die reflektierte Welle.

Die Faktoren $e^{\pm ax}$ deuten an, daß die Wellen keine konstante Amplitude haben, sondern daß die Amplituden beim Fortschreiten nach der $+x$ - oder $-x$ -Richtung gedämpft werden. a ist der räumliche Dämpfungsfaktor.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist nach Gl. 224 der Periodenzahl des Wechselstromes (ω) direkt proportional. Ist T die Periodendauer; so ist unter Berücksichtigung von Gl. 223 und 224

$$v = \frac{\omega}{b} = \frac{2\pi}{Tb} = \frac{\lambda}{T} \quad (225)$$

Die Wellen legen in einer Periode eine Wellenlänge zurück.

Der Faktor $\sqrt{\frac{A + j\omega C}{R + j\omega L}}$, mit dem die Spannungswellen zu multiplizieren sind, um die Stromwellen zu erhalten, hat die Dimension eines Leitwertes. Sein reziproker Wert

$$\sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = Z \quad (226)$$

hat die Dimension eines Widerstandes, man bezeichnet ihn als „Charakteristik“ der Leitung oder als „Wellenwiderstand“.

Bestimmung der Integrationskonstanten.

Zur Ermittlung der Konstanten \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{U}_2 geht man von den

sei die Spannung \mathfrak{P}_1 , der Strom \mathfrak{S}_1 . Danach wird aus Gl. 221 für $x=0$

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2, \quad \mathfrak{S}_1 = \frac{1}{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1),$$

daher

$$\mathfrak{U}_2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}), \quad \mathfrak{U}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z})$$

und

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \frac{1}{2}[(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) \\ &\quad + (\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \\ \mathfrak{S} &= \frac{1}{2\mathfrak{Z}}[(\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \\ &\quad - (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx)]. \end{aligned} \right\} \quad (221 a)$$

Für viele Rechnungen ist die Verwendung der Hyperbelfunktionen sehr bequem. Da

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}) &= \text{Cof } ax, & \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}) &= \text{Sin } ax \\ \text{Cof } ax \cos bx + j \text{Sin } ax \sin bx &= \text{Cof } (a + jb)x = \text{Cof } vx \\ \text{Sin } ax \cos bx + j \text{Cof } ax \sin bx &= \text{Sin } (a + jb)x = \text{Sin } vx \end{aligned}$$

erhält man für Gl. 221 a die Form

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}_1 \text{Cof } vx - \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z} \text{Sin } vx \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_1 \text{Cof } vx - \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{Z}} \text{Sin } vx \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (221 b)$$

Rechnung der x vom Leitungsende.

Häufig geht man bei Ermittlung der Konstanten \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{U}_2 von den am Ende der Leitung bestehenden Spannungs- und Stromwerten aus. Dann ist es zweckmäßig, die Längen x statt vom Leitungsanfang vom Leitungsende an zu rechnen. Hierzu braucht man nur in Gl. 217 $+vx$ und $-vx$ zu vertauschen, und in Gl. 218 statt dx $-dx$ zu setzen. Dann sind die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{U}_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \mathfrak{U}_1 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \\ \mathfrak{S} &= \frac{1}{\mathfrak{Z}} [\mathfrak{U}_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \mathfrak{U}_1 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \end{aligned} \right\} \quad (221 c)$$

Das Leitungsende ist jetzt $x=0$; hier sei die Spannung \mathfrak{P}_2 , der Strom \mathfrak{S}_2 , somit erhält man

$$\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{S}_2 = \frac{1}{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1),$$

daher

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_2 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{Z}), & \mathfrak{U}_1 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{S}_2 \mathfrak{Z}), \\ \mathfrak{P} &= \frac{1}{2}[(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) \\ &\quad + (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{S}_2 \mathfrak{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \\ \mathfrak{S} &= \frac{1}{2\mathfrak{Z}}[(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) \\ &\quad - (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{S}_2 \mathfrak{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)]. \end{aligned} \right\} \quad (221 d)$$

Mit Hyperbelfunktionen erhält man hier

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}_2 \operatorname{Cof} vx + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S} \sin vx \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_2 \operatorname{Cof} vx + \frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{S}} \sin vx \end{aligned} \right\} \dots \dots (221e)$$

An Hand dieser Gleichungen mögen die Eigenschaften der Strom- und Spannungsverteilung an einigen Beispielen näher erläutert werden.

67. Verlustfreie Leitung.

Nimmt man an, daß die Verluste vernachlässigbar klein sind, so gewinnen die Gleichungen eine übersichtlichere Form. Dieser ideelle Fall werde zunächst betrachtet und wir setzen

$$R=0, \quad A=0.$$

Nach Gl. 220 werden dann

$$a=0, \quad b=\omega\sqrt{LC}.$$

Die Faktoren $e^{\pm ax}$ werden gleich 1, die Wellen haben räumlich konstante Amplitude. Die Wellenlänge ist nach Gl. 223

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{CL}} = \frac{T}{\sqrt{CL}}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach Gl. 225

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \dots \dots \dots (225a)$$

Diese Geschwindigkeit ist für Freileitungen sehr angenähert gleich der Lichtgeschwindigkeit (300000 km i. d. Sek.). Bei den in der Starkstromtechnik gebräuchlichen Periodenzahlen ist die Wellen-

länge sehr groß, z. B. für $f = \frac{1}{T} = 50$ i. d. Sek.

$$\lambda = vT \cong 6000 \text{ km},$$

die größten bisher gebauten Kraftübertragungen sind nur ein Bruchteil einer Wellenlänge.

Bei Telephonströmen kann die Leitungslänge dagegen mehrere Wellenlängen betragen, für 3000 Perioden i. d. Sek. ist $\lambda = 100$ km.

Die Charakteristik (Gl. 226) ist bei der verlustfreien Leitung

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \dots \dots \dots (226a)$$

Die Gl. 221d für Spannung und Strom vereinfachen sich für $a=0$ in

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}_2 \cos bx + j\mathfrak{S}_2 Z \sin bx \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_2 \cos bx + j\frac{\mathfrak{P}_2}{Z} \sin bx \end{aligned} \right\} \dots \dots (221f)$$

Diese Gleichungen können in einem Polardiagramm dargestellt werden, das ein anschauliches Bild von der Änderung der Größe und Phase der Effektivwerte bzw. der Amplituden von Strom und Spannung ergibt. Diese Darstellung ist zuerst von Breisig (ETZ 1900, S. 87) angegeben worden, das hier gegebene Diagramm ist ein Sonderfall des später abzuleitenden allgemeinen Falles.

Ist in Fig. 148 OP_2 der Vektor der Klemmenspannung am Ende der Leitung, so ist die Projektion des um den Winkel $bx = P_2 \cdot OA_1$ gedrehten Vektors auf die Richtung von OP_2

$$OB_1 = P_2 \cos bx.$$

Ist ferner $OJ_2 = J_2 Z = OC_1$, so ist die Projektion von OC_1 auf die zu OP_2 senkrechte Richtung

$$OD_1 = J_2 Z \sin bx.$$

Ist J_2 gegen P_2 und φ_2 verzögert, so eilt $jJ_2 Z \sin bx$ gegen J_2 um 90° gegen P_2 um $(90^\circ - \varphi_2)$ vor; man trägt also $B_1 E_1 = OD_1$ senkrecht zu OJ_2 an

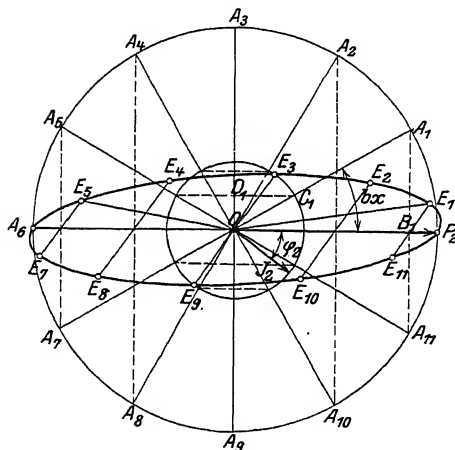


Fig. 148.

OB_1 an. OE_1 ist dann der Vektor der Spannung P im Abstand x vom Leitungsende. Führt man die Konstruktion durch (in Fig. 148 sind 12 Punkte im Abstand von $bx = 30^\circ$ gewählt), so erhält man als Ort für den Spannungsvektor der verlustfreien Leitung eine Ellipse. Die Momentanwerte erhält man in bekannter Weise durch Projektion der Vektoren auf die Zeitlinie.

Das Diagramm zeigt, daß die Amplitude der Spannung vom Leitungsende an zuerst wenig zu- und dann stark abnimmt, bis $bx = \frac{\pi}{2}$, also $x = \frac{\pi}{2b} = \frac{\lambda}{4}$ ist. Bei etwas mehr als einem Viertel der Wellenlänge ist sie um 90° in der Phase gegen P_2 verschoben, sie nimmt dann wieder zu, erreicht in der Nähe von $x = \frac{\lambda}{2}$ wieder ein Maximum und hat dort 180° Phasenverschiebung gegen die Spannung am Leitungsende.

Aus der Konstruktion folgt, daß für induktionsfreie Belastung, $\varphi_2 = 0$, die beiden Hauptachsen der Ellipse P_2 und $J_2 Z$ sind.

Für den Strom kann das gleiche Diagramm verwendet werden,

wenn man statt der Ströme die ihnen proportionalen Spannungsvektoren JZ betrachtet.

Setzt man in die Spannungsgleichung 221f anstatt x den Wert $\left(x - \frac{\pi}{2b}\right)$, so erhält man, da $\cos\left(bx - \frac{\pi}{2}\right) = \sin bx$ und $\sin\left(bx - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos bx$ ist,

$$\mathfrak{P}_{\left(x - \frac{\pi}{2b}\right)} = \mathfrak{P}_2 \sin x - j\mathfrak{S}_2 Z \cos bx.$$

Für den Strom an der Stelle x folgt aber aus Gl. 221f

$$\mathfrak{S}_{(x)} Z = \mathfrak{S}_2 Z \cos bx + j\mathfrak{P}_2 \sin bx,$$

daher ist

$$\mathfrak{S}_{(x)} Z = j\mathfrak{P}_{\left(x - \frac{\pi}{2b}\right)}.$$

Der Vektor $\mathfrak{S}Z$ an der Stelle x ist ebenso groß wie der Spannungsvektor P an einer um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge zurückliegenden Stelle, aber um 90° dagegen in der Phase im Sinne der Voreilung verschoben. Man sieht hieraus, daß die größten Amplituden des Stromes und der Spannung um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge auf der Leitung voneinander entfernt liegen. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung ändert sich längs der Leitung. Am Ende ist sie φ_2 . Da der Vektor $P_{\left(x - \frac{\lambda}{4}\right)}$ um 90° gegen $J_{(x)}Z$ zurückliegt, bildet er mit dem Vektor $P_{(x)}$,

der gegen $J_{(x)}Z$ um φ voreilt, den Winkel $\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$.

Ist also der Winkel zwischen einem Spannungsvektor und dem um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge zurückliegenden stumpf, so ist φ positiv: P eilt gegen J vor, wie für die Punkte 12 und 9; ist er spitz, so ist φ negativ, P ist gegen J verzögert, wie für den Vektor bei $\frac{1}{12}$ Wellenlänge OE_1 , gegen den der um $\frac{1}{4}$ Welle zurückliegende OE_{10} einen spitzen Winkel bildet. Die Leistung ist aber an allen Punkten der Leitung konstant, weil wir die Verluste vernachlässigt haben.

In Fig. 149 ist die Strom- und Spannungsverteilung längs der Leitung für 6 Augenblicke im Abstand von $\frac{1}{12}$ Periode dargestellt.

Die Figur gilt für folgende Verhältnisse.

Es werde eine Leistung von 1000 kVA bei einem $\cos \varphi_2 = 0,8$ mit einer Spannung von 50000 Volt übertragen. Der Strom an den sekundären Klemmen ist

$$J_2 = \frac{1000000}{0,8 \cdot 50000} = 25 \text{ Amp.}$$

Die Freileitung habe einen Durchmesser von 1 cm, die beiden Leitungen sind in einem Abstand von $D = 100$ cm aufgehängt.

Die Induktivität der Leitung pro km ist

$$L = \left(4 \ln \frac{D}{a} + 1 \right) 10^{-4} \text{ H/km} = 0,00222 \text{ H/km}.$$

Die Kapazität ist

$$C = \frac{1}{4 \ln \frac{D}{a}} \cdot \frac{10^{-6}}{9} \text{ F/km} = 0,00525 \cdot 10^{-6} \text{ F/km},$$

daher die Charakteristik

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0,00222 \cdot 10^6}{0,00525}} \cong 650 \text{ Ohm}$$

und $J_2 Z = 16250 \text{ Volt}$, d. h. etwa $\frac{1}{3}$ von P_2 .

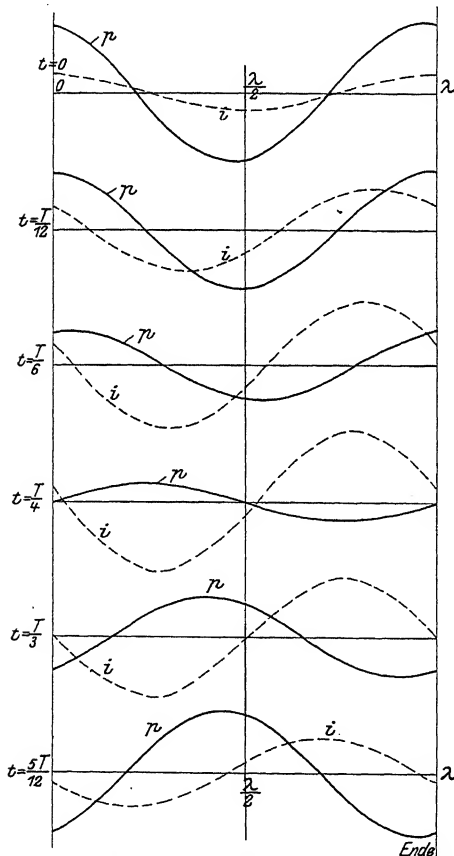


Fig. 149.

Bei Kabeln ist wegen der höheren Dielektrizitätskonstante C größer, die Charakteristik Z ist kleiner und hat etwa den Wert 60 bis 100 Ohm. Ebenso ist die

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen kleiner, sie ist angenähert der Quadratwurzel der Dielektrizitätskonstante umgekehrt proportional.

Da die Wellenlänge für 50 Perioden 6000 km beträgt, ist eine Freileitung von 100 km Länge nur $\frac{1}{60}$ der Wellenlänge, d. h. ihr entspricht in dem Diagramm ein Winkel von 6° vom Ende. Hier ist die Spannung am Leitungsanfang höher als am Ende. Dagegen tritt bei offener Leitung, d. h. für $J_2 = 0$, stets eine Spannungserhöhung vom Anfang gegen das Ende ein, hierfür ist ja nach Gl. 221 f

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_2 \cos bx.$$

Sie ist um so auffälliger, je größer $b = \omega \sqrt{LC}$ ist, also bei Kabeln, bei denen die Wellenlänge annähernd der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante umgekehrt

proportional ist, stärker als bei Freileitungen. Die Spannungserhöhung im Kabel wurde zuerst von Ferranti beobachtet und wird deswegen als „Ferranti-Phänomen“ bezeichnet.

An Hand des Diagramms können folgende Sonderfälle leicht übersehen werden.

1. Ist $J_2 Z = P_2$ und $\varphi_2 = 0$, so geht die Ellipse in einen Kreis über: Spannung und Strom sind längs der ganzen Leitung konstant. Hier besteht Resonanz zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern; denn wenn man für Z seinen Wert einsetzt, wird

$$J_2^2 L = P_2^2 C.$$

Die Energien des elektrischen und des magnetischen Feldes der Leitung sind gleichgroß, die Felder laden sich gegenseitig.

2. Stehende Wellen. Von Wichtigkeit ist ferner der Fall, daß die Ellipse in eine gerade Linie übergeht. In diesem Falle haben Spannung und Strom längs der ganzen Leitung gleiche Phase, sie ändern sich nur von Punkt zu Punkt der Größe nach und kehren ihre Richtung an bestimmten Punkten um. Beim Richtungswechsel gehen sie an bestimmten Punkten durch Null hindurch, und dies bedeutet, daß die Strom- und Spannungswellen nicht mehr fortschreiten, sondern stehen.

Stehende Wellen bestehen bei der verlustfreien Leitung zunächst bei offener Leitung, d. h. bei $\Im_2 = 0$, hierfür ist

$$\Re = \Re_2 \cos bx, \quad \Im Z = j \Re_2 \sin bx.$$

Die Spannung hat ihre größten Werte bei $x = 0, \frac{1}{2}\lambda, \lambda \dots$ und ihren Nulldurchgang bei $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda \dots$, der Strom eilt ihr um $\frac{1}{4}$ Periode vor und hat seine größten Werte beim Nulldurchgang der Spannung, und umgekehrt, Strom- und Spannungswellen sind um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge gegeneinander verschoben.

Zweitens treten stehende Wellen auf, wenn die Leitung am Ende widerstandsfrei kurzgeschlossen ist, dann ist $\Re_2 = 0$

$$\Re = j \Im_2 Z \sin bx, \quad \Im = \Im_2 \cos bx,$$

und drittens erhält man stehende Wellen, wenn Strom und Spannung am Leitungsende um 90° gegeneinander phasenverschoben sind; denn dann fallen die Vektoren $j \Im_2 Z$ in Fig. 148 stets in die Richtung von \Re_2 .

Die Bedingungen für stehende Wellen bei der verlustfreien Leitung sind daher $J_2 = 0$ oder $P_2 = 0$ oder $\varphi_2 = 90^\circ$, also für alle die Fälle, bei denen ein Faktor der an dem Ende abgegebenen Leistung

$$P_2 J_2 \cos \varphi_2$$

gleich Null ist, so daß sich als allgemeine Bedingung für stehende Wellen die ergibt, daß am Leitungsende keine Leistung abgegeben wird. Da die Leitung verlustfrei angenommen wurde, bedeutet dies, daß keine Leistung in die Leitung geschickt wird; sowie eine Lei-

stung abgegeben wird, müssen die Wellen fortschreiten, also auch dann, wenn die Leitung Verluste besitzt.

Spannungsresonanz. Ist an die Leitung eine Kapazität C_0 angeschlossen, so besteht nach vorstehendem eine stehende Welle. Die Länge x , an der die Spannung Null wird, ergibt sich daraus, daß

$$P_2 \cos bx = J_2 Z \sin bx$$

sein muß, oder, da $J_2 = P_2 \omega C_0$ ist,

$$\operatorname{tg}(bx) = \frac{1}{Z \omega C_0}.$$

Für kleine Winkel (bx), d. h. für eine im Verhältnis zur Wellenlänge kurze Leitung kann man setzen

$$\operatorname{tg}(bx) = bx.$$

Es wird also

$$x = \frac{1}{Z b \omega C_0}.$$

Da

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad b = \omega \sqrt{LC}$$

ist, wird

$$x = \frac{1}{\omega L \cdot \omega C_0}$$

oder

$$\omega L x = \frac{1}{\omega C_0} \quad (227)$$

Hierbei ist die induktive Reaktanz des Leistungsstückes von der Länge x gleich der Kapazitätsreaktanz des angeschlossenen Kondensators. Die Resonanzbedingung ist unabhängig von der Kapazität der Leitung, vorausgesetzt, daß diese klein ist gegen C_0 .

68. Leitung mit Verlusten.

a) Die unendlich lange Leitung.

Um den Einfluß der Verluste auf die Ausbildung der Wellen zu übersehen, untersuchen wir einige Sonderfälle. Den Verhältnissen in langen Telephon- oder Telegraphenleitungen kommt die Betrachtung der unendlich langen Leitung nahe. Darunter soll eine solche Leitung verstanden werden, bei der die vom fernen Ende nach dem Leitungsanfang zurückwandernde, die reflektierte, Welle sich dort nicht mehr bemerkbar macht. Hierbei ist in Gl. 221 S. 186 die Amplitude \mathfrak{A}_1 der reflektierten Welle für den Leitungsanfang ($x=0$) gleich Null zu setzen. Damit werden \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{S}_1 für den Leitungsanfang

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{S}_1 \mathfrak{B} = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{P}_1$$

und die Gleichungen für Spannung und Strom im Abstand x sind

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}_1 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_1 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \end{aligned} \quad (228)$$

Spannung und Strom stehen an allen Punkten der Leitung im gleichen Verhältnis wie am Leitungsanfang $\mathfrak{P} = \mathfrak{S} \mathfrak{Z}$, weil wir es eben nur mit einer Welle, der vorwärtsschreitenden, zu tun haben. \mathfrak{P} und \mathfrak{S} ändern gleichmäßig ihre Phase, die Amplituden nehmen nach Maßgabe der Dämpfungskonstante ab. Der Strom ist gegen die Spannung überall um den konstanten Phasenwinkel ζ der Charakteristik \mathfrak{Z} verschoben. Schreiben wir

$$\mathfrak{Z} = Ze^{j\zeta},$$

so wird nach Gl. 226 S. 187

$$Z = \sqrt[4]{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{A^2 + (\omega C)^2}} \quad \zeta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\frac{A}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}}{1 + \frac{A}{\omega C} \cdot \frac{R}{\omega L}} \quad (226b)$$

Je nachdem der Zähler in ζ positiv oder negativ ist, eilt die Spannung dem Strom oder der Strom der Spannung vor.

Das Polardiagramm der Spannungs- und Stromvektoren erhält man für die hier allein vorhandene vorwärts schreitende Welle durch Rückwärtsdrehung des Anfangsvektors um bx und gleichzeitige Multiplikation mit e^{-ax} als logarithmische Spirale. In Fig. 150 sind 12 Vektoren für eine ganze Wellenlänge in Abständen $bx = 30^\circ$ aufgetragen. Der Einfluß der Dämpfung wird besonders anschaulich durch Vergleich mit dem bei der verlustlosen Leitung S. 193 angenommenen besonderen Fall, daß $P = J \cdot Z$ ist. Dort waren Strom und Spannung konstant, die Vektoren beschreiben einen Kreis; die Abstände der Spirale vom umschriebenen Kreis zeigen direkt die Dämpfung.

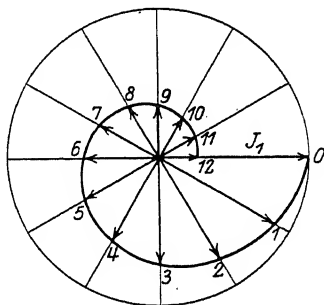


Fig. 150.

Die Spirale ist vollständig charakterisiert durch das Verhältnis von Dämpfungskonstante a und Winkelmaß b . Nach einer Wellenlänge haben Strom und Spannung wieder die gleiche Phase wie am Anfang, ihre Beträge sind für $x = \lambda = \frac{2\pi}{b}$ gesunken auf $e^{-2\pi\frac{a}{b}}$.

Es läßt sich schon übersehen, daß bei einer endlichen Leitung mit Verlusten das Vektordiagramm im allgemeinen aus zwei logarithmischen Spiralen zusammengesetzt ist, je einer für die vorwärts laufende und für die reflektierte Welle.

In einem besonderen Fall verschwindet aber auch bei endlicher Leitungslänge die reflektierte Welle. Bei endlicher Leitungslänge ist das Verhältnis der Spannung P_2 zum Strom J_2 am Leitungsende durch den Scheinwiderstand Z_2 der angeschlossenen Apparate gegeben. Ist

nun Z_2 nach Größe und Phasenwinkel gleich der Charakteristik der Leitung, so stehen auch am Ende der endlichen Leitung Spannung und Strom im gleichen Verhältnis wie an allen Punkten der unendlich langen Leitung. Man sieht aus Gl. 221 d, die Spannung und Strom bei Rechnung der x vom Leitungsende darstellen, daß durch Einsetzen von $\beta_2 = \Im_2 \beta$ die in Richtung der positiven x , also nach dem Leitungsanfang wandernde Welle, verschwindet. Die Gl. 228 und die einfache Spirale haben also auch für diesen Fall der „reflexionsfreien“ Leitung Gültigkeit.

b) Leitung mit Widerstand und Kapazität.

Bei Telephon und Telegraphenkabeln sind die Induktivität L und die Ableitung A sehr klein und können in erster Annäherung vernachlässigt werden. Die ersten Rechnungen der Fortpflanzung von Telegraphenströmen in Kabeln nach W. Thomson beruhen hierauf.

Für $A=0$ und $L=0$ wird nach Gl. 220 und 226

$$a=b=\sqrt{\frac{1}{2}R\omega C} \dots \dots \dots (229)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{R}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \dots \dots \dots (230)$$

Die Charakteristik ist umgekehrt proportional der Wurzel aus der Frequenz, je höher die Frequenz um so kleiner die Spannung für einen bestimmten Strom, um so größer aber die Dämpfungskonstante. Der Phasenwinkel von Z ist -45° , der Strom eilt überall (bei unendlich langer oder reflexionsfreier Leitung) der Spannung um 45° vor. Die Amplituden sind nach einer Wellenlänge auf $e^{-2\pi} = \frac{1}{540}$ des Anfangswertes gedämpft.

Beispiel. Für eine Doppelleitung eines vieladrigen Telephonkabels mit Adern von 0,8 mm wurde für $\omega = 5000$ bestimmt: $R = 64 \text{ Ohm km}^{-1}$. $C = 0,0365 \cdot 10^{-6} \text{ F. km}^{-1}$. $A = 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ Siemens km}^{-1}$. $L = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Henry km}^{-1}$. Hiermit ist für $\omega = 5000$ $\beta = 586 e^{-j43^\circ 31'}$, während die Näherungsgleichung (230) $593 e^{-j45^\circ}$ ergibt. Ferner sind $a = 0,0749$, $b = 0,0781$ nahezu gleichgroß. Die Wellenlänge ist $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \cong 80 \text{ km}$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = \frac{\omega}{\beta} = 64000 \text{ km Sek}^{-1}$.

Die starke Dämpfung begrenzt die Entfernung der Nachrichtenübermittlung durch Kabel, besonders bei Übermittlung der Sprache, weil die Obertöne stärker gedämpft werden und die Sprache undeutlich wird.

c) Pupinkabel.

Die Dämpfungskonstante nähert sich für hohe Frequenzen einem Grenzwert. Setzt man nach Gl. 220

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left[RA - \omega^2 LC + \omega^2 LC \sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) \left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right)} \right]}$$

und entwickelt die zweite Wurzel in eine Reihe, so wird unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) \left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right)} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \frac{A^2}{\omega^2 C^2} \right) + \dots$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{4} R^2 \frac{C}{L} + \frac{1}{2} AR + \frac{1}{4} A^2 \frac{L}{C}}$$

$$a = \frac{1}{2} \left[R \sqrt{\frac{C}{L}} + A \sqrt{\frac{L}{C}} \right] \dots \dots \dots (231)$$

Diese Gleichung zeigt, daß es für höhere Frequenzen bei gegebenen Werten von R und A eine kleinste Dämpfung gibt, die von dem Verhältnis $L:C$ abhängt und dort liegt, wo die beiden Teile gleichgroß sind. Dies ist der Fall für

$$L:C = R:A \dots \dots \dots (232)$$

Durch Einschalten von Drosselspulen in Telephonkabel hat Pupin sich diesem Minimum zu nähern gesucht und eine ganz bedeutende Verbesserung in der Reichweite der Kabeltelephonie erzielt. Das gleiche Ziel wird nach Krarup durch Umspinnung der Kabel mit Eisendraht erreicht. In beiden Fällen wird neben der Erhöhung der Induktivität auch der Widerstand der Leitung vergrößert. Sind z. B. R_0 und L_0 Widerstand und Induktivität der Pupinspulen für 1 km Leitung (die Pupinspulen werden in Abständen von etwa 2 km in Kabel eingebaut), so wird in Gl. 231 L um L_0 und R um R_0 vergrößert. Es ist daher das Verhältnis $L_0:R_0$ der Drosselspulen, die sog. Zeitkonstante τ möglichst groß zu wählen. Dies erfordert teure

Drosselspulen. Durch Einsetzen von L_0 und $R_0 = \frac{L_0}{\tau}$ in Gl. 231 wird

$$a = \frac{1}{2} \left[\left(R + \frac{L_0}{\tau} \right) \sqrt{\frac{C}{L + L_0}} + A \sqrt{\frac{L + L_0}{C}} \right].$$

Für einen konstanten Wert τ hat a bei veränderlichem L_0 ein Minimum für

$$L_0 = \left(\frac{\tau R - L}{C + A\tau} \right) C - L$$

und ist

$$a_{\min} = \sqrt{\left(R - \frac{L}{\tau} \right) \left(A - \frac{C}{\tau} \right)^2}$$

²⁾ s. Breisig, ETZ 1901, S. 1029; Lüschen, ETZ 1908, S. 1150 u. 1913 S. 31.

ein Wert, der für Kabel ($L \cong 0$) angenähert

$$a_{\min} = \sqrt{R \left(A + \frac{C}{\tau} \right)}$$

ist und den Einfluß der von vornherein nicht bekannten Ableitung zeigt. Nach Breisig¹⁾ soll für eine deutliche Verständigung bei l km Leitungslänge $al < 3$ bis 4 sein. Seine Messungen¹⁾ an Doppelleitungen eines Fernsprechkabels von 3 mm Drahtdurchmesser zeigten bei $\omega = 5000$ im Mittel einen Wert $a = 0,00314$, wenn Pupinspulen von 0,15 H und 3,9 Ohm wirksamem Widerstand in Abständen von 1,7 km eingeschaltet waren, ohne diese $a = 0,018$. Die Reichweite wurde durch die Spulen somit versechsfacht.

Beim Anschluß einer Freileitung an ein Kabel ist wegen der großen Verschiedenheit der Charakteristiken die Bedingung der Reflexionsfreiheit (S. 196) nicht erfüllt; das Kabel erfordert bei gleicher Spannung einen viel größeren Ladestrom als die Freileitung, die resultierende Dämpfung wird verändert, man bezeichnet dies als Reflexionsverluste. Die Erhöhung des Wellenwiderstandes der Kabel mit Pupinspulen ermöglicht daher eine bessere Anpassung an angeschlossene Freileitungen.

d) Verzerrungsfreie Leitungen.

Die in Gl. 232 S. 197 abgeleitete Beziehung für das Minimum der Dämpfung bei hohen Frequenzen $R:L = A:C$ führt zu einem weiteren Sonderfall. Eine Leitung, bei der diese Beziehung erfüllt ist, wird nach Heaviside verzerrungsfrei genannt. Es wird hiermit nach Gl. 226 die Charakteristik

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

wie bei der verlustfreien Leitung. Die Fortpflanzungskonstante Gl. 216 wird

$$\nu = (a + jb) = (R + j\omega L) \sqrt{\frac{C}{L}} = (A + j\omega C) \sqrt{\frac{L}{C}},$$

somit

$$a = \frac{R}{Z} = AZ, \quad b = \omega \sqrt{LC}.$$

Die Dämpfungskonstante ist hier unabhängig von der Frequenz, Schwingungen von allen Frequenzen werden gleich stark gedämpft, dies begründet die Bezeichnung als verzerrungsfrei. Dies gilt freilich ohne Rücksicht auf die Erhöhung des Widerstandes mit der Frequenz infolge Stromverdrängung.

¹⁾ Breisig, ETZ 1914, S. 646 ff.

Starkstromfreileitungen kommen diesem Fall häufig nahe. Für das Beispiel einer Doppelleitung S. 192 war $C = 0,00525 \cdot 10^{-6} \text{ F/km}^{-1}$. $L = 0,00222 \text{ H/km}^{-1}$. Der Widerstand ist $R = 0,45 \text{ Ohm/km}^{-1}$ (für die Doppelleitung). Es müßte daher $A = R \cdot \frac{C}{L} = 0,45 \cdot \frac{0,00525}{0,00222} \cdot 10^{-6} = 1,06 \cdot 10^{-6} \text{ S/km}^{-1}$, was einem Isolationswiderstand (einschl. den evtl. Koronaverlusten) von rund 1 Megohm f. d. km entspricht.

Das im folgenden abgeleitete Vektordiagramm zeigt uns den allgemeinen Verlauf, wenn $\Im_2 \Im \geq \Re_2$ ist, also die Zusammensetzung aus 2 Spiralen, und zwar für den besonderen Fall der verzerrungsfreien Leitung. Der Unterschied bei einer nicht verzerrungsfreien Leitung besteht dann nur darin, das die Vektoren $\Im \Im$ nicht mit \Im phasengleich, sondern um den Phasenwinkel ζ des Wellenwiderstandes (s. Gl. 226 b S. 195) dagegen verschoben sind. Für die verzerrungsfreie Leitung ist ζ Null.

In den Gl. 221 d ist jetzt

$$\begin{aligned} \Re = \frac{1}{2} [(\Re_2 + \Im_2 Z) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) \\ + (\Re_2 - \Im_2 Z) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] . \end{aligned} \quad (233)$$

$$\begin{aligned} \Im Z = \frac{1}{2} [(\Re_2 + \Im_2 Z) e^{-ax} (\cos bx + j \sin bx) \\ - (\Re_2 - \Im_2 Z) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] . \end{aligned} \quad (234)$$

In Fig. 151 ist OA_0 der Vektor der Spannung P_2 am Leitungs-
ende, OA_1 der um den Winkel bx voreilende Vektor

$$\Re_2 (\cos bx + j \sin bx),$$

OA_{11} der um bx nacheilende Vektor

$$\Re_2 (\cos bx - j \sin bx).$$

In der Figur ist wieder der Kreis, der einer Wellenlänge entspricht, in zwölf Teile geteilt, entsprechend dem Fortschreiten um $bx = 30^\circ$. Die voreilenden Vektoren sind mit $\frac{1}{2} e^{ax}$, die nacheilenden mit $\frac{1}{2} e^{-ax}$ zu multiplizieren; im ersten Fall erhält man die mit OC_1 bis OC_6 bezeichneten, im zweiten Fall die mit OD_1 bis OD_6 bezeichneten Vektoren nach der logarithmischen Spirale. Die Konstruktion ist nur für sechs Punkte entsprechend einer halben Wellenlänge durchgeführt, außerdem ist die Periodenzahl gleich 100 angenommen,

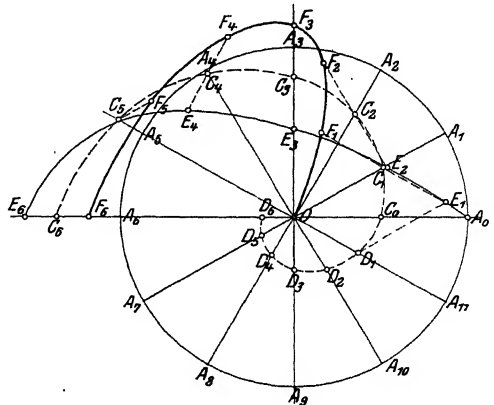


Fig. 151.

durchgeführt, außerdem ist die Periodenzahl gleich 100 angenommen,

so daß im früheren Beispiel für eine halbe Wellenlänge $e^{a\frac{\lambda}{2}} = 2,76$ ist, um die Figur nicht zu sehr zu verzerren.

Addiert man zusammengehörige Vektoren OC_1 und OD_1 , OC_2 und OD_2 , so ergeben sich die Vektoren OE_1 bis OE_6 , die zunächst die Spannungsverteilung für $J_2=0$, d. h. bei der offenen Leitung darstellen, denn hierfür ist Gl. 233

$$\mathfrak{P}_{(J_2=0)} = \frac{1}{2} \mathfrak{P}_2 [e^{ax}(\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax}(\cos bx - j \sin bx)] \quad (233a)$$

Diesem Diagramm entsprach bei der verlustfreien Leitung die gerade Linie.

Subtrahiert man zusammengehörige Vektoren OC_1 und OD_1 usw., so erhält man die Vektoren OF_1 bis OF_6 . Diese stellen nach Gl. 234

$$\mathfrak{Z}_{(J_2=0)} = \frac{1}{2} \mathfrak{P}_2 [e^{ax}(\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} \cos (bx - j \sin bx)] \quad (233b)$$

die Stromverteilung bei offener Leitung ($J_2=0$) dar.

Wählt man als Ausgangsvektor OA_0 nicht \mathfrak{P}_2 , sondern $\mathfrak{Z}_2 Z$, so stellen die durch Summation zweier Vektoren erhaltenen OE_1 bis OE_6 in anderem Maßstab nach Gl. 234.

$$\mathfrak{Z}_{(P_2=0)} = \frac{1}{2} \mathfrak{Z}_2 Z [e^{ax}(\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax}(\cos bx - j \sin bx)] \quad (234a)$$

die Stromverteilung für $P_2=0$, d. h. bei kurzgeschlossenem Leitungsende dar, während die durch Subtraktion zweier Vektoren erhaltenen OF_1 bis OF_6 entsprechend Gl. 234 für $P_2=0$

$$\mathfrak{P}_{(P_2=0)} = \frac{1}{2} \mathfrak{Z}_2 Z [e^{ax}(\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax}(\cos bx - j \sin bx)] \quad (234b)$$

die Spannungsverteilung bei kurzgeschlossener Leitung abbilden.

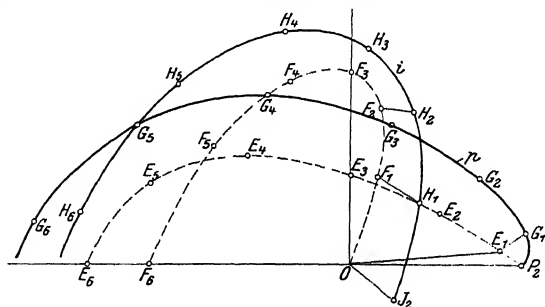


Fig. 152.

Nun zeigt sich durch Vergleich der Gl. 233 a, b und 234 a, b mit 233 und 234, daß man die Spannungs- und Stromvektoren bei Belastung erhält durch Addition der entsprechenden Vektoren der offenen zu denen der kurzgeschlossenen Leitung.

In Fig. 152 sind die Kurven $E_1—E_6$ und $F_1—F_6$ nochmals aufgetragen; der Vektor OA_0 der Fig. 151 ist mit OP_2 be-

zeichnet, da er die Spannung am Ende darstellt. Bei der Addition ist zu berücksichtigen, daß die Vektoren, sofern sie die dem Strom proportionale Spannung $J_2 Z$ darstellen, im Verhältnis $\frac{J_2 Z}{P_2}$ zu verkleinern und um den Winkel φ_2 nach rückwärts zu drehen sind, um den J_2 gegen E_2 nacheilt. Macht man also $E_1 G_1 = \frac{J_2 Z}{P_2} \times OF_1$ und um φ_2 gegen OF_1 zurückgedreht, so ist OG_1 als Summe von OE_1 und $E_1 G_1$ die Spannung im Abstand von $\frac{1}{12}$ Wellenlänge vom Leitungsende. Ebenso sind die Punkte G_2 bis G_6 gewonnen, die Vektoren OG_x stellen die Spannungsverteilung dar. Analog erhält man die Vektoren OH_1 bis OH_6 der Stromverteilung, indem man an jeden Vektor OF_x den im Verhältnis $\frac{J_2 Z}{P_2}$ verkleinerten und um φ_2 gedrehten Vektor OE_x gleich $F_x H_x$ anträgt. Der erste Vektor ist OJ_2 , der den Strom am Leitungsende darstellt.

Diese Diagramme für \Re und \Im treten an die Stelle der bei der verlustfreien Leitung gefundenen Ellipsen.

Auch hier hat die Spannung ihre kleinste Amplitude im Abstand von etwa $\frac{1}{4}$ Wellenlänge vom Leitungsende.

69. Ermittlung der Konstanten einer Leitung durch den Leerlauf- und den Kurzschlußversuch.

Es soll nun gezeigt werden, wie die Konstanten der Leitung durch Messung ermittelt werden können. Hierzu genügen Strom-, Spannungs- und Leistungsmessung erstens bei Leerlauf, d. h. bei offenen sekundären Klemmen, und zweitens bei Kurzschluß, d. h. bei widerstandslos verbundenen sekundären Klemmen.

1. Leerlauf. Bei offenen sekundären Klemmen bestehe an diesen die Spannung \Re_2, \Im_2 ist Null. Am Anfang der Leitung, für den $x=l$ ist, erhält man nach Gl. 221d und 221e die Leerlaufspannung \Re_{10} und den Leerlaufstrom \Im_{10} .

$$\left. \begin{aligned} \Re_{10} &= \Re_2 \frac{e^{\nu l} + e^{-\nu l}}{2} = \Re_2 \operatorname{Cos}(\nu l) \\ \Im_{10} &= \Im_2 \frac{e^{\nu l} - e^{-\nu l}}{2} = \Im_2 \operatorname{Sin}(\nu l) \end{aligned} \right\} \dots \dots (235)$$

Das Verhältnis des Leerlaufstromes zur Leerlaufspannung ist der Leitwert für Leerlauf y_0 . Es ist

$$y_0 = y_0 e^{j\varphi_0} = \frac{\Im_{10}}{\Re_{10}} = \frac{1}{\Im} \frac{e^{\nu l} - e^{-\nu l}}{e^{\nu l} + e^{-\nu l}} = \frac{1}{\Im} \operatorname{Tg}(\nu l) \dots (236)$$

Man kann den Betrag y_0 als das Verhältnis des primären Stromes J_{10} zur Spannung P_{10} durch Messung ermitteln, und wenn gleich-

zeitig die Leerlaufleistung N_0 gemessen wird, ergibt sich der Phasenwinkel φ_0 aus

$$\cos \varphi_0 = \frac{N_0}{P_{10} J_{10}}.$$

2. Kurzschluß. Bei kurzgeschlossenem Leitungsende ist $P_2 = 0$. Schickt man durch die kurzgeschlossene Leitung den Strom J_2 , so seien Spannung und Strom am Anfang P_{1k} und J_{1k} ; aus Gl. 221d und e ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \Re_{1k} &= \Im_2 \Im \frac{e^{\nu l} - e^{-\nu l}}{2} = \Im_2 \Im (\nu l) \\ \Im_{1k} &= \Im_2 \frac{e^{\nu l} + e^{-\nu l}}{2} = \Im_2 \mathfrak{Cof}(\nu l) \end{aligned} \right\} \dots (237)$$

Das Verhältnis dieser beiden Größen ist der Scheinwiderstand bei Kurzschluß z_k . Es ist

$$z_k = z_k e^{j\varphi_k} = \frac{\Re_{1k}}{\Im_{1k}} = \Im \frac{e^{\nu l} - e^{-\nu l}}{e^{\nu l} + e^{-\nu l}} = \Im \mathfrak{Tg}(\nu l) \dots (238)$$

Man erhält wieder den Betrag z_k als Verhältnis von P_{1k} zu J_{1k} und durch Messung der Leistung bei Kurzschluß N_k

$$\cos \varphi_k = \frac{N_k}{P_{1k} J_{1k}}.$$

Aus den beiden Gl. 235 und 238 ergibt sich nun

$$\sqrt{\eta_0 z_k} = \frac{e^{\nu l} - e^{-\nu l}}{e^{\nu l} + e^{-\nu l}} = \mathfrak{Tg}(\nu l) \dots (239)$$

und

$$\sqrt{\frac{z_k}{\eta_0}} = \Im = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(A + j\omega C)}} \dots (240)$$

Um aus Gl. 239

$$\nu = (a + jb) = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} \dots (241)$$

zu ermitteln, multipliziert man Zähler und Nenner mit $e^{\nu l}$ und erhält

$$\sqrt{\eta_0 z_k} = \frac{e^{2\nu l} - 1}{e^{2\nu l} + 1},$$

oder

$$e^{2\nu l} = \frac{1 + \sqrt{\eta_0 z_k}}{1 - \sqrt{\eta_0 z_k}}, \dots (239a)$$

woraus ν ermittelt werden kann. Nach Gl. 240 und 241 ist dann

$$\left. \begin{aligned} (R + j\omega L) &= \nu \Im \\ (A + j\omega C) &= \frac{\nu}{\Im} \end{aligned} \right\} \dots (242)$$

Zur Ausrechnung setze man

$$\sqrt{y_0 z_k} = \sqrt{y_0 z_k} e^{j \frac{(\varphi_0 + \varphi_k)}{2}} = \sqrt{y_0 z_k} \left(\cos \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} + j \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right),$$

daher nach Gl. 239a und 241

$$\begin{aligned} e^{2\gamma l} &= e^{2(a+jb)l} = \frac{1 + \sqrt{y_0 z_k}}{1 - \sqrt{y_0 z_k}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{y_0 z_k} \cos \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right) + j \sqrt{y_0 z_k} \sin \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)}{1 - \sqrt{y_0 z_k} \cos \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right) - j \sqrt{y_0 z_k} \sin \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)} \\ &= \frac{1 - y_0 z_k + 2j \sqrt{y_0 z_k} \sin \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)}{1 + y_0 z_k - 2 \sqrt{y_0 z_k} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2}}. \end{aligned}$$

Nun ist auf der linken Seite

$$e^{2\gamma l} = e^{2(a+jb)l} = e^{2al} (\cos 2bl + j \sin 2bl).$$

Setzt man die reellen und die imaginären Teile auf beiden Seiten einander gleich, so wird durch Division

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2bl &= \frac{2 \sqrt{y_0 z_k} \sin \frac{(\varphi_0 + \varphi_k)}{2}}{1 - y_0 z_k} \\ b &= \frac{1}{2l} \arctg \frac{2 \sqrt{y_0 z_k} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2}}{1 - y_0 z_k} \quad \dots \quad (243) \end{aligned}$$

Ferner wird

$$\begin{aligned} e^{2al} &= \frac{\sqrt{(1 - y_0 z_k)^2 + 4 y_0 z_k \sin^2 \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2}}}{1 + y_0 z_k - 2 \sqrt{y_0 z_k} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2}} \\ a &= \frac{1}{2l} \ln \frac{\sqrt{(1 - y_0 z_k)^2 + 4 y_0 z_k \sin^2 \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)}}{1 + y_0 z_k - 2 \sqrt{y_0 z_k} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2}} \quad \dots \quad (244) \end{aligned}$$

Hiermit sind a und b und damit $\gamma = (a + jb)$ bestimmt. Aus Gl. 223 ergibt sich ferner

$$\beta = Z e^{j\delta} = \sqrt{\frac{z_k}{y_0}} = \sqrt{z_k} e^{j \frac{\varphi_k - \varphi_0}{2}}$$

und mittels der Gl. 242 können nun R , A , L , C berechnet werden.

Strom- und Spannungsgleichungen mit den bei Leerlauf und bei Kurzschluß gemessenen Konstanten.

Wie bei der Konstruktion des Vektordiagramms Fig. 152 auf Grund der Gl. 223 und 224 gezeigt war, setzen sich die Ströme und Spannungen bei Belastung zusammen aus den entsprechenden Werten bei Leerlauf und bei Kurzschluß.

Zur Berechnung der Beziehung zwischen primären und sekundären Strömen und Spannungen für irgendeinen Belastungszustand an den Enden einer Leitung von gegebener Länge führt man diese Zusammensetzung auf die direkt meßbaren Größen y_0 und z_k zurück, wie von Franke und Breisig zuerst gezeigt wurde.

Aus Gl. 235 und 237, S. 201 u. 202, geht hervor, daß das Verhältnis der primären Leerlaufspannung zur sekundären Spannung ebenso groß ist wie das Verhältnis des primären Kurzschlußstromes zum sekundären Strom, nämlich

$$\frac{\mathbb{P}_{10}}{\mathbb{P}_2} = \frac{\mathfrak{S}_{1k}}{\mathfrak{S}_2} = \mathfrak{Cof}(\nu l) = \mathfrak{C}.$$

Dieses Verhältnis, das mit \mathfrak{C} bezeichnet werden soll und das eine komplexe Zahl ist, läßt sich wie folgt durch die meßbaren Größen y_0 und z_k ausdrücken.

Nach Gl. 239 ist

$$\eta_0 \delta_k = \mathfrak{I}g^2(\nu l) = \frac{\mathfrak{Sin}^2(\nu l)}{\mathfrak{Cof}^2(\nu l)}.$$

Nun ist für die Hyperbelfunktionen:

$$\mathfrak{Sin}^2(\nu l) - \mathfrak{Cof}^2(\nu l) = -1,$$

daher

$$\eta_0 \delta_k = \frac{\mathfrak{Cof}^2(\nu l) - 1}{\mathfrak{Cof}^2(\nu l)} = 1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2(\nu l)},$$

oder

$$\eta_0 \delta_k = 1 - \frac{1}{\mathfrak{C}^2} \dots \dots \dots (245)$$

Hiernach ist nach Gl. 235 und 237

$$\begin{array}{lll} \text{bei Leerlauf} & \mathbb{P}_{10} = \mathbb{P}_2 \mathfrak{C}, & \mathfrak{S}_{10} = \mathbb{P}_{10} \eta_0 = \mathbb{P}_2 \mathfrak{C} \eta_0 \\ \text{bei Kurzschluß} & \mathbb{P}_{1k} = \mathfrak{S}_{1k} \delta_k = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C} \delta_k, & \mathfrak{S}_{1k} = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}. \end{array}$$

Durch Addition wird bei Belastung

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2 \mathfrak{C} + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C} \delta_k \\ \mathfrak{S}_1 = \mathbb{P}_2 \mathfrak{C} \eta_0 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C} \end{array} \dots \dots \dots (246)$$

Die weitere Diskussion dieser Gleichungen folgt in Kap. XII.

Die hier neben η_0 und δ_k auftretende Größe $\mathfrak{C} = C e^{\nu r}$ heißt nach Breitfeld¹⁾ der Kabelfaktor, nach der Definition ist er das

¹⁾ E. u. M. 1907, Heft 47.

Verhältnis der primären zur sekundären Spannung bei Leerlauf. Ist er kleiner als 1, so tritt bei Leerlauf Spannungserhöhung am Leitungsende auf (Ferranti Phänomen s. S. 193), sonst Spannungsabfall. In dem Vektordiagramm, Fig. 152, S. 200 ist der Betrag C das Verhältnis einer Länge OE_1 bis OE_2 zur Länge OP , und γ der Winkel zwischen diesen Vektoren. Spannungserhöhung bei Leerlauf tritt danach im allgemeinen für Leitungslängen bis zu etwas mehr als ein Viertel der Wellenlänge auf.

70. Die Leitungskonstanten bei Mehrfachleitungen.

Die Berechnung der Erscheinungen auf Leitungen wurde auf vier Größen L , R , C , A zurückgeführt, die man als „Betriebskonstanten“ bezeichnet, und die Rechnung wurde an dem einfachen Beispiel einer Schleife aus Hin- und Rückleitung erläutert.

Bei Vereinigung einer größeren Anzahl Leiter, wie bei Mehrphasenleitungen, Telephonkabeln usw., die man als Mehrfachleitungssysteme bezeichnet, und die aus einer Anzahl Leiter und eventuell einer leitenden Hülle oder auch der Erde als Rückleitung bestehen, sind die in die Rechnung einzusetzenden Betriebskonstanten je nach der Betriebsart gewisse Kombinationen von anderen, den Fundamentalkonstanten.

Eine vollständige Erläuterung des Zusammenhanges dieser Größen ist von Emde und Diesselhorst, ETZ 1909, gegeben; es sei darauf verwiesen und hier daraus nur folgendes angeführt.

a) **Kapazität und Ableitung.** Als Fundamentalkonstanten gelten die Kapazität C und die Ableitung A eines Leiters, der die Spannung p gegen Erde hat, während alle anderen Leiter einschließlich der Hülle geerdet sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p^2 C & \text{ die elektrische Energie des Systems,} \\ p^2 A & \text{ der Energieverlust in der Zeiteinheit,} \\ q &= Cp \text{ die Ladung des Leiters,} \\ q_v &= Ap \text{ der Ladungsverlust in der Zeiteinheit.} \end{aligned}$$

Sind in einem System von n Leitern die Spannungen der Leiter gegen Erde $p_1 p_2 \dots p_n$, so ist nach Maxwell die Ladung des μ ten Leiters

$$q_\mu = c_{\mu 1} p_1 + c_{\mu 2} p_2 + \dots + c_{\mu n} p_n \quad \dots \quad (247)$$

der Ladungsverlust in der Zeiteinheit

$$q_{v\mu} = a_{\mu 1} p_1 + a_{\mu 2} p_2 + \dots + a_{\mu n} p_n \quad \dots \quad (247a)$$

$c_{\mu \nu}$ und $a_{\mu \nu}$ sind die Kapazitäts- und Ableitungskoeffizienten. Es ist

$$c_{\mu \nu} = c_{\nu \mu}, \quad a_{\mu \nu} = a_{\nu \mu}.$$

Diese Koeffizienten werden auf die zuvor definierten Fundamentalkonstanten durch folgende zwei Messungen zurückgeführt.

1. Sind alle Leiter außer dem betrachteten (μ) einschließlich der Hülle geerdet, während er die Spannung p_μ gegen Erde hat, so ist

$$q_\mu = p_\mu c_{\mu\mu}.$$

$c_{\mu\mu}$ ist die zuvor definierte Kapazität C_μ des Leiters μ .

2. Sind alle Leiter außer zweien (μ und ν) einschließlich der Hülle geerdet, und haben diese beiden die Spannung $p_\mu = p_\nu = p$ gegen Erde, so ist die Summe ihrer Ladungen

$$\begin{aligned} q_\mu + q_\nu &= (c_{\mu\mu} + 2c_{\mu\nu} + c_{\nu\nu})p = C_{\mu\nu}p \\ C_{\mu\nu} &= (c_{\mu\mu} + 2c_{\mu\nu} + c_{\nu\nu}) \end{aligned}$$

ist die Kapazität der beiden vereinigten Leiter. Sämtliche $\frac{1}{2}n(n+1)$ Kapazitätskoeffizienten

$$c_{\mu\mu} = C_\mu, \quad c_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(C_\mu + C_\nu - C_{\mu\nu}) \dots (248)$$

sind hiermit durch ebensoviele meßbare Kapazitäten bestimmt.

Analog gilt für die Ableitungskoeffizienten

$$a_{\mu\mu} = A_\mu, \quad a_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(A_\mu + A_\nu - A_{\mu\nu}) \dots (248a)$$

b) Induktivität und Widerstand. Als Fundamentalkonstanten gelten Induktivität und Widerstand einer Schleife, die durch Verbinden der Enden zweier Einzelleiter entsteht; fließt in dieser Schleife der Strom i , während alle übrigen stromlos sind, so ist

$\frac{1}{2}i^2L$ die magnetische Energie des Systems,

i^2R der Energieverlust in der Zeiteinheit,

$\Phi = Li$ der Induktionsfluß der Schleife,

$\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$ der induktive Spannungsabfall der Schleife,

$\chi = Ri$ der Ohmsche Spannungsabfall.

Entsprechend den Spannungen rechnet man zweckmäßig auch die Induktionsflüsse von der Hülle aus. Der Induktionsfluß einer Schleife aus den Leitern μ und ν berechnet sich dann als Differenz der Induktionsflüsse zweier Schleifen μ_0 und ν_0 , die aus dem Leiter μ bzw. ν und der Hülle (Index 0) gebildet werden.

$$\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\mu 0} - \Phi_{\nu 0}.$$

Analog 247 wird dann

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu 0} &= l_{\mu 1}i_1 + l_{\mu 2}i_2 + \dots + l_{\mu n}i_n \\ l_{\mu\nu} &= l_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Die Induktionskoeffizienten $l_{\mu\nu}$ sind wieder durch zwei Messungen auf die Fundamentalkonstanten L zurückzuführen.

1. Man bilde eine Schleife aus dem Leiter μ und der Hülle, alle anderen Schleifen sind offen. Alle i sind Null, außer $i_\mu = -i_0 = i$.

Es wird

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu 0} &= l_{\mu\mu} i = L_{\mu 0} i \\ l_{\mu\mu} &= L_{\mu 0}\end{aligned}$$

ist die Induktivität der Schleife $\mu - 0$.

2. Man bildet die Schleife $\mu - \nu$, alle anderen Schleifen sind offen. Alle Ströme sind Null außer $i_\mu = -i_\nu = i$. Es wird

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu\nu} &= \Phi_{\mu 0} - \Phi_{\nu 0} = (l_{\mu\mu} - 2l_{\mu\nu} + l_{\nu\nu}) i = L_{\mu\nu} i \\ L_{\mu\nu} &= l_{\mu\mu} - 2l_{\mu\nu} + l_{\nu\nu}\end{aligned}$$

ist die Induktivität der Schleife $\mu - \nu$. Die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Induktionskoeffizienten

$$l_{\mu\mu} = L_{\mu 0} \quad l_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(L_{\mu 0} + L_{\nu 0} - L_{\mu\nu}), \quad \dots \quad (249)$$

sind hiermit durch ebenso viele meßbare Induktivitäten bestimmt.

Die Widerstände werden am einfachsten als Schleifenwiderstände $R_{\mu\nu} = R_\mu + R_\nu$ bestimmt, worin R_μ , R_ν die Widerstände der Einzelleiter sind. Setzt man den Ohmschen Spannungsabfall einer Schleife

$$\begin{aligned}\chi_{\mu\nu} &= \chi_\mu - \chi_\nu = R_\mu i_\mu - R_\nu i_\nu \\ \chi_{\mu 0} &= r_{\mu 1} i_1 + r_{\mu 2} i_2 + \dots + r_{\mu n} i_n,\end{aligned}$$

worin $r_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(R_{\mu 0} + R_{\nu 0} - R_{\mu\nu})$ und $R_{\mu\mu} = 0$

ist, so hat man eine analoge Form wie für die Induktivitäten. Die Koeffizienten $r_{\mu\nu}$ können aus den Einzelwiderständen berechnet werden.

Die Betriebskonstanten werden durch Einsetzen der beim Betrieb gültigen Bedingungen erhalten.

Beispiele. 1. Die Einphasenleitung mit symmetrischer Anordnung der Leiter gegen Erde. Ist p die „Betriebsspannung“ zwischen beiden Leitern, so sind die Spannungen gegen Erde

$$p_1 = \frac{p}{2}, \quad p_2 = -\frac{p}{2}.$$

Wegen der Symmetrie ist

$$C_1 = C_2 = c_{11} = c_{22}$$

und nach Gl. 248

$$c_{12} = -(C_1 - \frac{1}{2}C_{12})$$

$$q_1 = c_{11} p_1 + c_{12} p_2 = (c_{11} - c_{12}) \frac{p}{2} = (C_1 - \frac{1}{4}C_{12}) p.$$

Die Betriebskapazität ist

$$C = \frac{q_1}{p} = (C_1 - \frac{1}{4}C_{12}) \quad \dots \quad (250)$$

Für Betrieb mit Einphasenstrom ist $i_2 = -i_1$. Es ist nach Gl. 249

$$\begin{aligned}l_{11} &= L_{10} = l_{22} = L_{20}, \quad l_{12} = (L_{10} - \frac{1}{2}L_{12}), \\ \Phi_{12} &= \Phi_{10} - \Phi_{20} = i_1 l_{11} + i_2 l_{12} - i_2 l_{22} - i_1 l_{24} = i_1 L_{12}.\end{aligned}$$

Die Betriebsinduktivität ist

$$\frac{\Phi_{12}}{i_1} = L_{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (251)$$

2. Symmetrische Dreiphasenleitung bei symmetrischem Betrieb (bei großer Entfernung der Leiter gegen Erde). Die Spannungen gegen Erde sind die Phasenspannungen, daher $p_1 + p_2 + p_3 = 0$.

Bei symmetrischer Anordnung ist

$$\begin{aligned} c_{11} = c_{22} = c_{33} &= C_1 = C_2 = C_3, \\ C_{12} &= C_{23} = C_{31}, \\ c_{12} = c_{23} = c_{31} &= -(C_1 - \tfrac{1}{2} C_{12}) \\ q_1 = c_{11} p_1 + c_{12} p_2 + c_{13} p_3 &= c_{11} p_1 + c_{12} (p_2 + p_3) = (c_{11} - c_{12}) p_1 \\ &= p_1 2 (C_1 - \tfrac{1}{4} C_{12}). \end{aligned}$$

Die Betriebskapazität bezogen auf die Phasenspannung ist

$$C = 2 (C_1 - \tfrac{1}{4} C_{12}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (252)$$

Für $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ ist, da bei Symmetrie

$$\begin{aligned} l_{11} = l_{22} = l_{33} &= L_{10} = L_{20} = L_{30}, \\ l_{12} = l_{23} = l_{31} &= L_{10} - \tfrac{1}{2} L_{12}; \\ \Phi_{10} = i_1 l_{11} + i_2 l_{12} + i_3 l_{13} &= i_1 L_{10} + (i_2 + i_3) (L_{10} - \tfrac{1}{2} L_{12}) = \tfrac{1}{2} i_1 L_{12}. \end{aligned}$$

Die Betriebsinduktivität ist für eine Phase

$$L = \tfrac{1}{2} L_{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (253)$$

3. Bei einer atmosphärischen Ladung (s. Kap. XIV) erhalten alle Leiter die gleiche Spannung p gegen Erde. Die Betriebskapazität wird hierbei für die Einphasenleitung $C = C_{12}$, analog bei der Dreiphasenleitung, da

$$\begin{aligned} q = q_1 + q_2 + q_3 &= 3 (c_{11} + c_{12} + c_{23}) p = 3 (-C_1 + C_{12}) p \\ C &= 3 (-C_1 + C_{12}). \end{aligned}$$

Für den Entladestrom ist $i_1 = i_2 = i_3 = i$

$$\begin{aligned} \Phi_{10} &= i (l_{11} + l_{12} + l_{13}) = i [3 L_{10} - L_{12}] \\ L &= 3 L_{10} - L_{12} \quad \text{für die Dreiphasenleitung,} \\ L &= 2 L_{10} - \tfrac{1}{2} L_{12} \quad \text{„ „ Einphasenleitung.} \end{aligned}$$

Teilkapazitäten. Bei manchen Rechnungen ist es zweckmäßig, die Maxwell'schen Kapazitätsgleichungen (247) in etwas veränderter Form zu schreiben, nämlich

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= k_{11} p_1 + k_{12} (p_1 - p_2) + k_{13} (p_1 - p_3) + \dots \\ q_2 &= k_{22} p_2 + k_{21} (p_2 - p_1) + k_{23} (p_2 - p_3) + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (254)$$

Zwischen den Koeffizienten k und c bestehen die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= k_{11} + k_{12} + k_{13} + \dots \\ c_{12} &= -k_{12}, \quad c_{21} = -k_{21} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255)$$

Während die $c_{\mu\nu}$ außer für $\mu=\nu$ alle negativ sind, sind alle $k_{\mu\nu}$ positiv und heißen Teilkapazitäten. Das Gleichungssystem (254) gibt durch die Teilung des Verschiebungsflusses in Teile, die zwischen jedem Leiter und Erde und zwischen je zwei Leitungen verlaufen, ein besonders anschauliches Bild der Ladungsverteilung. Für eine Dreiphasenleitung (Fig. 153) z. B. entsprechen den k_{11} , k_{22} , k_{33} die Teilflüsse zwischen den drei Leitern und Erde, den k_{12} , k_{23} , k_{31} die zwischen zwei Leitungen und können schematisch durch Ersatzkondensatoren dargestellt werden. Ein Erdschluß eines Leiters entspricht in diesem Schema einer Überbrückung der betreffenden Teilkapazität gegen Erde, z. B. k_{11} .

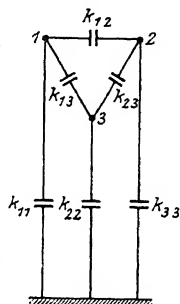


Fig. 153.

Die Berechnung der Koeffizienten C , c und k wird auf die Maxwell'schen Potentialkoeffizienten oder elektrischen Induktivitäten γ zurückgeführt, mittels derer die Spannung jedes Leiters gegen Erde durch die Ladungen sämtlicher Leiter bestimmt wird, nach der Gleichung

$$p_\mu = \gamma_{1\mu} q_1 + \gamma_{2\mu} q_2 + \dots + \gamma_{n\mu} q_n \dots \quad (256)$$

Hierin ist für Freileitungen für 1 km Länge mit Bezug auf Fig. 154

$$\gamma_{\mu\mu} = 2.9 \ln 2 \frac{h_\mu}{a} \text{ km}/\mu\text{F}, \quad \gamma_{\mu\nu} = 2.9 \ln \frac{D'_{\mu\nu}}{D_{\mu\nu}} \text{ km}/\mu\text{F} \quad (257)$$

Bei unsymmetrischen Anordnungen erhält man aus den γ die Koeffizienten c der Gl. 247 am einfachsten mittels der Determinanten des Gleichungssystems 256 und mittels Gl. 255 die Teilkapazitäten k .

Bei symmetrischen Systemen werden die $\gamma_{\mu\mu}$ für sich und die für $\gamma_{\mu\nu}$ für sich gleich.

Für die Einphasenleitung Fig. 156 ist z. B. $D'_{12} = \sqrt{4h^2 + D^2}$, wofür bei großer Höhe angenähert $2h$ gesetzt werden kann. Hier wird

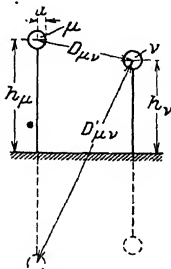


Fig. 154.

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = 2.9 \ln \frac{2h}{a} \text{ km}/\mu\text{F}$$

$$\gamma_{12} = 2.9 \ln \frac{2h}{D} \text{ km}/\mu\text{F}$$

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}} \mu\text{F}/\text{km} & k_{12} &= k_{11} \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11} - \gamma_{12}} \mu\text{F}/\text{km} \\ c &= k \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{11} - \gamma_{12}} \mu\text{F}/\text{km} & c &= k \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11} - \gamma_{12}} \mu\text{F}/\text{km} \end{aligned} \right\} \quad (258)$$

Für Einphasenbetrieb ($p_2 = -p_1$) wird die Betriebskapazität

$$C = \frac{1}{\gamma_{11} - \gamma_{12}}.$$

Für das Zweileiterkabel Fig. 158 S. 212 gelten die Beziehungen 258 mit

$$\begin{aligned}\gamma_{11} = \gamma_{22} &= 2 \cdot \frac{9}{\varepsilon} \ln \frac{R^2 - \varrho^2}{Ra} \text{ km}/\mu\text{F}, \\ \gamma_{12} &= 2 \cdot \frac{9}{\varepsilon} \ln \frac{R^2 + \varrho^2}{2R\varrho} \text{ km}/\mu\text{F}.\end{aligned}$$

Für die Dreiphasenleitung (Fig. 157) kann man, wenn die mittlere Höhe h über Erde groß gegen den Leiterabstand ist, annähert $D'_{\mu\nu} \cong 2h$ setzen. Man erhält dann dieselben Werte $\gamma_{\mu\mu}$ und $\gamma_{\mu\nu}$ wie für die Einphasenfreileitung. Hier ist

$$\left. \begin{aligned}k_{11} &= \frac{1}{\gamma_{\mu\mu} + 2\gamma_{\mu\nu}}, & k_{12} &= k_{11} \frac{\gamma_{\mu\nu}}{\gamma_{\mu\mu} - \gamma_{\mu\nu}} \\ c_{11} &= k_{11} \frac{\gamma_{\mu\mu} + \gamma_{\mu\nu}}{\gamma_{\mu\mu} - \gamma_{\mu\nu}}, & c_{12} &= -k_{11} \frac{\gamma_{\mu\nu}}{\gamma_{\mu\mu} - \gamma_{\mu\nu}}\end{aligned} \right\} \quad (259)$$

Für das Dreiphasenkabel Fig. 159 gelten wieder die Gl. 259 mit den Werten

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\mu} &= 2 \cdot \frac{9}{\varepsilon} \ln \frac{R^2 - \varrho^2}{Ra} \text{ km}/\mu\text{F}, \\ \gamma_{\mu\nu} &= \frac{9}{\varepsilon} \ln \frac{R^4 + \varrho^2 R^2 + \varrho^4}{3 R^2 \varrho^2} \text{ km}/\mu\text{F}.\end{aligned}$$

Für symmetrischen Dreiphasenbetrieb ($p_1 + p_2 + p_3 = 0$) ist die Betriebskapazität

$$C = \frac{1}{\gamma_{\mu\mu} - \gamma_{\mu\nu}}.$$

Die magnetischen Induktionskoeffizienten $l_{\mu\nu}$ (Gl. 249) berechnen sich nach S. 14 und 132.

Sieht man von dem magnetischen Feld im Innern des Leiters ab, das z. B. bei Freileitungen sehr klein ist, aber auch bei hohen Frequenzen wegen der Stromverdrängung nahezu Null ist, so gilt die Beziehung

$$l_{\mu\nu} : \gamma_{\mu\nu} = \varepsilon \mu : c^2,$$

worin c die Lichtgeschwindigkeit ist.

Für Freileitungen ist $\varepsilon = \mu = 1$, und wenn $\gamma_{\mu\nu}$ in $\text{km}/\mu\text{F}$, $l_{\mu\nu}$ in Henry/km gesetzt wird,

$$l_{\mu\nu} : \gamma_{\mu\nu} = 1 : 9 \cdot 10^4.$$

Wir geben in nachstehender Tabelle eine Zusammenstellung

der Betriebskapazitäten und Induktivitäten der gebräuchlichsten Leiteranordnungen¹⁾.

	C Mfd/km	L Henry/km
1 Draht, Erde als Rückleitung (Fig. 155)	$\frac{1}{2 \ln \frac{2h}{a}}$	$\left(4 \ln \frac{h}{a} + 0,5\right) 10^{-4}$
Einphasenfreileitung (Fig. 156)	$\frac{1}{4 \ln \frac{D}{a}}$	$\left(4 \ln \frac{D}{a} + 1\right) 10^{-4}$
Dgl. unter Berücksichtigung der Erde	$2 \ln \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2h}{D}\right)^2} \right]^{\frac{1}{9}}$	
Symmetrische Dreiphasenfreileitung pro Phase (Fig. 157)	$\frac{1}{2 \ln \frac{D}{a}}$	$\left(2 \ln \frac{D}{a} + 0,5\right) 10^{-4}$
Einphasenkabel, Mantel geerdet (Fig. 158)	$4 \ln \frac{2}{a} \frac{\varrho (R^2 - \varrho^2)}{(R^2 + \varrho^2)} \cdot \frac{1}{9}$	$\left(4 \ln \frac{2}{a} + 1\right) 10^{-4}$
Symmetrisches Dreiphasenkabel, Mantel geerdet (Fig. 159)	$\ln \left[\frac{3}{a^2} \frac{\varrho^2 (R^2 - \varrho^2)^3}{R^6 - \varrho^6} \right]^{\frac{1}{9}}$	$\left(2 \ln \frac{D}{a} + 0,5\right) 10^{-4}$
Konzentrisches Kabel (Fig. 160)		
a) Betriebskapazität, wenn Außenleiter geerdet.	a) $\frac{\varepsilon_1}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$	$\left[2 \ln \frac{a_3}{a_1} + 2 \frac{a_3^4 - a_2^4}{(a_3^2 - a_2^2)^2} \ln \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_3^2}{a_3^2 - a_2^2} \right] 10^{-4}$
Bei geerdetem Mantel ist a) Kap. des inneren Leiters, b) Kap. des äußeren Leiters	b) $\frac{1}{9} \left[\frac{\varepsilon_1}{\ln \frac{a_2}{a_1}} + \frac{\varepsilon_2}{\ln \frac{a_4}{a_3}} \right]$	

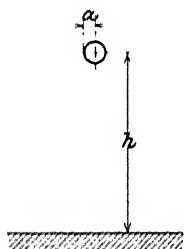


Fig. 155.

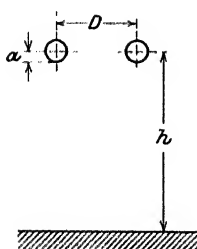


Fig. 156.

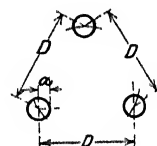


Fig. 157.

¹⁾ S. Breisig, ETZ 1898; Lichtenstein, ETZ 1904; Orlich, ETZ 1908, S. 310; Orlich, Kapazität und Induktivität.

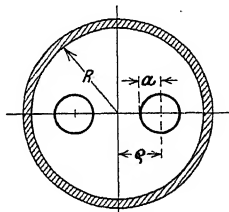


Fig. 158.

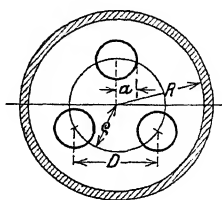


Fig. 159.

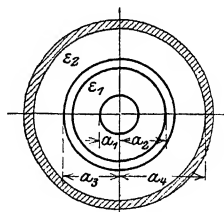


Fig. 160.

71. Ersatzschaltungen für Starkstromleitungen.

Bei den niederen Frequenzen der Starkstromtechnik ist eine beträchtliche Leitungslänge nur ein kleiner Bruchteil der Wellenlänge. Hierbei rechnet man oft mit einem vereinfachtem Schema. Man denkt sich entweder einen Ladestrom in der Mitte der Leitung und erhält Fig. 161 mit einem Leitwert y zwischen zwei Scheinwiderständen $\frac{1}{2}z$. Oder man denkt sich am Anfang und Ende je einen Ladestrom entsprechend Fig. 162 mit zwei Leitwerten

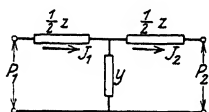


Fig. 161.

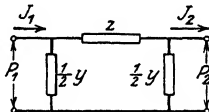


Fig. 162.

$\frac{1}{2}y$ an den Enden eines Scheinwiderstandes z . Damit diese Ersatzschaltungen die Verhältnisse zwischen Strömen und Spannungen am Anfang und Ende der Leitung

getreu wiedergeben, sind y und z so zu bestimmen, daß sowohl bei Leerlauf wie bei Kurzschluß sich die gleichen Werte wie bei der wirklichen Leitung ergeben.

Erste Ersatzschaltung Fig. 161. Hier gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 &= \frac{1}{2} \mathfrak{S} (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1) \\ \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2 &= y (\mathfrak{P}_1 - \frac{1}{2} \mathfrak{S}_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots (260)$$

Für $\mathfrak{S}_2 = 0$ erhält man hiermit das Verhältnis der Spannungen und den Leitwert bei Leerlauf

$$\frac{\mathfrak{P}_{10}}{\mathfrak{P}_2} = (1 + \frac{1}{2} y \mathfrak{S}), \quad \frac{\mathfrak{S}_{10}}{\mathfrak{P}_{10}} = \frac{y}{1 + \frac{1}{2} y \mathfrak{S}} \dots \dots (261a)$$

Diese Werte sind bei der wirklichen Leitung $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 (\nu l)$ und $y_0 = \frac{1}{3} \text{Tang}(\nu l)$ (s. S. 201, Gl. 235 u. 236).

Für $\mathfrak{P}_2 = 0$ ist das Verhältnis der Ströme und der Scheinwiderstand bei Kurzschluß

$$\frac{\mathfrak{S}_{1k}}{\mathfrak{S}_2} = (1 + \frac{1}{2} y \mathfrak{S}), \quad \frac{\mathfrak{P}_{1k}}{\mathfrak{S}_{1k}} = \frac{1}{2} \mathfrak{S} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2} y \mathfrak{S}} \right) \dots (261b)$$

Diese Werte sind bei der Leitung nach Gl. 237 u. 238 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}of(\nu l)$ und $\mathfrak{z}_k = \mathfrak{z} \mathfrak{Z}ang(\nu l)$.

Damit das Ersatzschema die Leitung widerstandsgetreu abbildet, ist hiernach zu setzen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \mathfrak{z} &= \mathfrak{z}_k \frac{\mathfrak{C}}{1 + \mathfrak{C}} = \mathfrak{z} \frac{\mathfrak{C}in(\nu l)}{1 + \mathfrak{C}of(\nu l)} \\ \eta &= \eta_0 \mathfrak{C} = \frac{1}{\mathfrak{z}} \mathfrak{C}in(\nu l) \end{aligned} \right\} \dots (262)$$

Durch Reihenentwicklung der $\mathfrak{C}in$ und $\mathfrak{C}of$ wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathfrak{z} &= \mathfrak{z}(\nu l) \frac{1 + \frac{(\nu l)^2}{3!} + \frac{(\nu l)^4}{5!} + \dots}{2 + \frac{(\nu l)^2}{2!} + \frac{(\nu l)^4}{4!} + \dots} \\ \eta &= \frac{1}{\mathfrak{z}}(\nu l) \left[1 + \frac{(\nu l)^2}{3!} + \frac{(\nu l)^4}{5!} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Beschränkt man sich auf die quadratischen Glieder der Reihen und setzt nach S. 202 Gl. 242

$$\mathfrak{z}(\nu l) = (R + j\omega L)l, \quad \frac{1}{\mathfrak{z}}(\nu l) = (A + j\omega C)l,$$

dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathfrak{z} &= \frac{1}{2} l(R + j\omega L) \left[1 - \frac{1}{12} l^2 \{RA - \omega^2 LC + j(\omega LA + \omega CR)\} \right] \\ \eta &= l(A + j\omega C) \left[1 + \frac{1}{6} l^2 \{RA - \omega^2 LC + j(\omega LA + \omega CR)\} \right] \end{aligned} \quad (263)$$

Die Glieder vor den eckigen Klammern sind für $\frac{1}{2} \mathfrak{z}$ Wirk- und Blindwiderstand der halben Leitung, für η Wirk- und Blindleitwert der ganzen Leitung. Es fragt sich, bis zu welchen Leitungslängen die in Klammern stehenden Faktoren vernachlässigt werden können. Dies wird offenbar der Fall sein, wenn der größere nicht mehr als 1% von der Einheit abweicht. Die Leitungslängen seien für zwei praktische Fälle ermittelt.

a) Dreiphasenfreileitung für 110000 Volt, 120 qmm, $f=50$ Per./sek. Die Konstanten je Phase sind: $R=0,15$ Ohm/km, $L=0,0013$ H/km, $C=0,009 \cdot 10^{-6}$ F/km, $A=0,5 \cdot 10^{-6}$ Siemens/km. Das größere Korrekturglied steht im Ausdruck für η , es weicht hier von 1 ab um $l^2 [-0,18 + j0,105] \cdot 10^{-6}$. Der Betrag ist $l^2 0,208 \cdot 10^{-6}$ und wird 0,01, wenn $l \cong 220$ km ist.

b) Dreiphasenkabel für 10000 Volt, 50 qmm, $f=50$ Per./Sek. Mit $R=0,36$ Ohm/km, $L=0,00035$ H/km, $C=0,185 \cdot 10^{-6}$ F/km, $A=0,5 \cdot 10^{-6}$ Siemens/km je Phase, weicht der größere Korrekturfaktor von der Einheit um $l^2 (-1,03 + j3,5) \cdot 10^{-6}$ ab. Der Betrag wird gleich 0,01, wenn $l \cong 52$ km ist.

Hieraus folgt, daß man in vielen praktischen Fällen für L zwischen zwei Speisepunkten die Korrektur ganz vernachlässigen kann.

Zweites Ersatzschema (Fig. 162). Hier ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2 &= \frac{1}{2} \eta (\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_1) \\ \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 &= \mathfrak{z} (\mathfrak{S}_1 - \frac{1}{2} \eta \mathfrak{P}_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Diese Gleichungen entstehen aus Gl. 260 durch Vertauschung von η und \mathfrak{z} und \mathfrak{P} und \mathfrak{S} . Man erhält in ganz analoger Ableitung

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{z} &= \mathfrak{z}_k \mathfrak{C} = \mathfrak{z} \sin(\nu l) \\ \frac{1}{2} \eta &= \eta_0 \frac{\mathfrak{C}}{1 + \mathfrak{C}} = \frac{1}{\mathfrak{z}} \frac{\sin \nu l}{1 + \cos(\nu l)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Dies ergibt die gleichen Ausdrücke wie bei dem ersten Schema, nur sind die Korrekturglieder in bezug auf η und \mathfrak{z} vertauscht. Man kann somit mit beiden Ersatzkreisen mit gleicher Genauigkeit rechnen.

72. Kettenleiter.

Durch Aneinanderreihen einer größeren Anzahl gleicher Glieder nach dem Schema der Fig. 161 oder 162 erhält man Leitungsschemata nach Fig. 163 und 164, die man als Kettenleiter bezeichnet. Die Schemata 161 und 162 heißen auch Kettenglieder, die wir zur Abkürzung als T - und Π -Kettenglied unterscheiden wollen und so

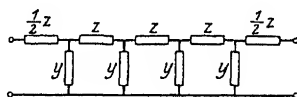


Fig. 163.

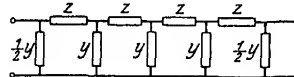


Fig. 164.

die Kettenleiter. Der T -Kettenleiter beginnt und endet mit Reihenwiderstand, der Π -Kettenleiter mit einem Nebenschluß. Die η und \mathfrak{z} können beliebige Kombinationen von Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten sein. Der Kettenleiter dient der experimentellen Untersuchung der Vorgänge in langen Telegrafleitungen. Durch geeignete Wahl der Größen und der Zahl der Glieder läßt sich eine Leitung von beliebiger Länge und charakteristischen Eigenschaften nachahmen, man nennt dies eine künstliche Leitung¹⁾.

Für das n^{te} Glied einer Kette aus m Gliedern gelten die Gleichungen 264 und 264 für die beiden Schemata, wenn anstatt $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{P}_n \mathfrak{S}_n$

¹⁾ Vachy, Traité d'Electricité, Bd. II, 1890; Breisig, Verh. d. D. Ges. 1910; K. W. Wagner, Arch. f. El., Bd. III, S. 315; Bd. VIII, S. 6

für $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{S}_1 \dots \mathfrak{P}_{n-1} \mathfrak{S}_{n-1}$ gesetzt wird. Es ergibt sich für Fig. 164, entsprechend Gl. 264,

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_{n-1} - \mathfrak{S}_n &= \frac{1}{2} \eta (\mathfrak{P}_n + \mathfrak{P}_{n-1}) \\ \mathfrak{P}_{n-1} - \mathfrak{P}_n &= \mathfrak{Z} (\mathfrak{S}_{n-1} - \frac{1}{2} \eta \mathfrak{P}_{n-1}) \end{aligned} \right\} \dots (266)$$

Diese Differenzengleichungen treten an die Stelle der Differentialgleichungen der Leitung, die als Kettenleiter mit unendlich vielen Gliedern aufzufassen ist. Die Lösung ist analog. Wir setzen

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{U} e^{\nu n}, \quad \mathfrak{S}_n = \mathfrak{B} e^{\nu n}, \quad \dots (267)$$

worin \mathfrak{U} und ν Konstante sind. Hiermit wird (266)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} (1 - e^{\nu}) &= \frac{1}{2} \eta \mathfrak{U} (1 + e^{\nu}) \\ \mathfrak{B} \mathfrak{Z} &= \mathfrak{U} (1 - e^{\nu} + \frac{1}{2} \eta \mathfrak{Z}) \end{aligned} \right\} \dots (268)$$

Durch Division der beiden Gleichungen werden \mathfrak{U} und \mathfrak{B} eliminiert.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \eta \mathfrak{Z} (1 + e^{\nu}) &= (1 - e^{\nu}) (1 - e^{\nu} + \frac{1}{2} \eta \mathfrak{Z}) \\ (1 - e^{\nu})^2 &= \eta \mathfrak{Z} e^{\nu} \\ 1 - e^{\nu} &= \pm e^{\frac{\nu}{2}} \sqrt{\eta \mathfrak{Z}}. \end{aligned}$$

Nach beiderseitiger Multiplikation mit $\frac{1}{2} e^{-\frac{\nu}{2}}$ erhält man die Bestimmungsgleichung für ν

$$\frac{1}{2} \left(e^{\frac{\nu}{2}} - e^{-\frac{\nu}{2}} \right) = \sin \frac{\nu}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\eta \mathfrak{Z}} \quad \dots (269)$$

Aus der ersten der Gl. 268 wird für das Verhältnis von \mathfrak{P}_n zu \mathfrak{S}_n in (267)

$$-\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{B}} = \frac{2 e^{\nu} - 1}{\eta e^{\nu} + 1} = \frac{2}{\eta} \mathfrak{Z} \frac{\nu}{2} = \mathfrak{Z} \quad \dots (270)$$

Entsprechend den zwei Werten $\pm \nu$ in Gl. 269, mit denen auch \mathfrak{Z} in (270) mit $\mathfrak{Z} \frac{\nu}{2}$ das Vorzeichen wechselt, erhält die Lösung (267) zwei Glieder

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_n &= \mathfrak{U}_1 e^{\nu n} + \mathfrak{U}_2 e^{-\nu n} \\ \mathfrak{S}_n &= \frac{1}{\mathfrak{Z}} (-\mathfrak{U}_1 e^{\nu n} + \mathfrak{U}_2 e^{-\nu n}) \end{aligned} \right\} \dots (271)$$

Am Anfang der Kette ($n=0$) seien Spannung und Strom $\mathfrak{P}_a \mathfrak{S}_a$, daher

$$\mathfrak{P}_a = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2, \quad \mathfrak{S}_a \mathfrak{Z} = -\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2,$$

somit

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{1}{2} (\mathfrak{P}_a - \mathfrak{S}_a \mathfrak{Z}), \quad \mathfrak{U}_2 = \frac{1}{2} (\mathfrak{P}_a + \mathfrak{S}_a \mathfrak{Z}).$$

Hiermit wird in (271)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_n &= \mathfrak{P}_a \cos \nu n - \mathfrak{S}_a \mathfrak{Z} \sin \nu n \\ \mathfrak{S}_n &= \mathfrak{S}_a \cos \nu n - \frac{\mathfrak{P}_a}{\mathfrak{Z}} \sin \nu n \end{aligned} \right\} \dots (272)$$

Diese Gleichungen entsprechen den mit Hyperbelfunktionen dargestellten Gl. 221b einer homogenen Leitung, wenn an Stelle von n die Leitungslänge x gesetzt wird. ν ist die Fortpflanzungskonstante, \mathfrak{z} die Charakteristik, Werte, die sich bei der Leitung aus den auf die Längeneinheit bezogenen Konstanten $\mathfrak{z} = (R + j\omega L)$ und $\eta = (A + j\omega C)$ berechneten, wobei für unendlich viele Glieder $\sin \alpha = \mathfrak{Z}g \alpha = \alpha$ zu setzen ist, und aus (269) und (270) $\nu = \sqrt{\eta \mathfrak{z}}$, $\mathfrak{z} = \frac{\nu}{\eta} = \sqrt{\frac{\mathfrak{z}}{\eta}}$ wird, womit die aus Gl. 216 und 226 bekannten Werte erhalten werden.

Sind \mathfrak{P}_e , \mathfrak{Z}_e die Werte am Ende der Kette von m Gliedern; so wird mit den analogen Beziehungen wie bei der Leitung

$$\mathfrak{Cof}(\nu m) = \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{z} \mathfrak{T}g(\nu m) = \mathfrak{z}_k, \quad \frac{1}{\mathfrak{z}} \mathfrak{T}g(\nu m) = \eta_0,$$

aus Gl. 272

$$\frac{\mathfrak{P}_e}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{P}_a - \mathfrak{Z}_a \mathfrak{z}_k, \quad \frac{\mathfrak{Z}_e}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{Z}_a - \mathfrak{P}_a \eta_0,$$

woraus mit $\eta_0 \mathfrak{z}_k = 1 - \frac{1}{\mathfrak{C}^2}$ den Gl. 246 für die Leitung entsprechend folgt

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_a &= \mathfrak{P}_e \mathfrak{C} + \mathfrak{Z}_e \mathfrak{C} \mathfrak{z}_k \\ \mathfrak{Z}_a &= \mathfrak{Z}_e \mathfrak{C} + \mathfrak{P}_e \mathfrak{C} \eta_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (273)$$

Der Kettenleiter als Ganzes verhält sich wie eine Leitung mit denselben aus dem Leerlauf- und dem Kurzschlußversuch zu bestimmenden Konstanten $\eta_0 \mathfrak{z}_k$ und \mathfrak{C} .

Für den Kettenleiter Fig. 163 war, wie auf S. 214 erwähnt, in den Ausgangsgleichungen η und \mathfrak{z} mit Bezug auf \mathfrak{P} und \mathfrak{Z} vertauscht, man erhält wieder die gleichen Beziehungen, nur wird der Ausdruck für die Charakteristik

$$\mathfrak{z}' = \frac{\mathfrak{z}}{2 \mathfrak{T}g \frac{\nu}{2}}.$$

Beispiele. 1. Die Spannungsverteilung an Hängeisolatoren¹⁾. In Fig. 165 bedeute C die Kapazität zwischen zwei Isolatorgliedern, c die Kapazität eines Gliedes gegen Erde. Setzen wir hier $\mathfrak{z} = \frac{1}{j\omega C}$, $\eta = j\omega c$, so wird in Gl. 269

$$\sin \frac{\nu}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\eta \mathfrak{z}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{C}}.$$

Der Anfang der Kette, $n=0$, ist an den Leitungsmast aufgehängt, die Spannung gegen Erde ist Null. Daher

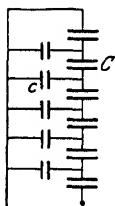


Fig. 165.

¹⁾ s. Rüdenberg, ETZ 1914, S. 412.

wird $\mathfrak{P}_a = 0$ und in Gl. 271 $\mathfrak{U}_2 = -\mathfrak{U}_1$. Damit wird die Spannung des n^{ten} Gliedes

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{U}_1 (e^{\nu n} - e^{-\nu n}) = 2 \mathfrak{U}_1 \sin \nu n.$$

Das letzte Glied (m) hat die Spannung \mathfrak{P} der Leitung gegen Erde. Daraus folgt

$$\mathfrak{P} = 2 \mathfrak{U}_1 \sin \nu m$$

und

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P} \frac{\sin \nu n}{\sin \nu m} \dots \dots \dots (274)$$

Durch das Verhältnis $c:C$ sind ν und die Spannungsverteilung vollständig bestimmt; dieses Verhältnis hängt von der Art der Aufhängung ab, im allgemeinen ist c viel kleiner als C . In Fig. 166

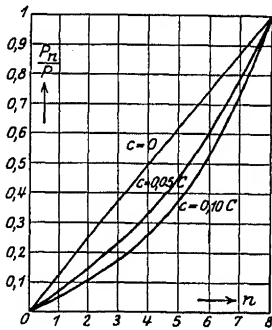


Fig. 166.

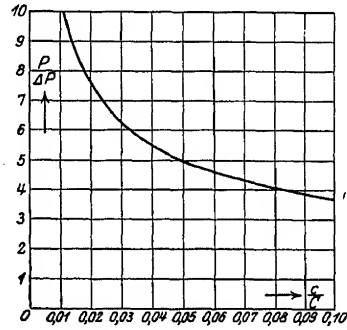


Fig. 167.

ist die Spannungsverteilung für $m=8$ Glieder und $c:C$ gleich 0, 0,05 und 0,1 aufgetragen. Je größer dieses Verhältnis, um so mehr weicht die Spannungsverteilung von der Geraden ab, um so mehr Spannung fällt auf die letzten Glieder. Die Spannung zwischen dem n^{ten} und dem vorhergehenden Glied ist

$$\Delta \mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_n - \mathfrak{P}_{(n-1)} = \frac{\mathfrak{P}}{\sin \nu m} [\sin \nu n - \sin \nu (n-1)]$$

und für das letzte Glied

$$\Delta \mathfrak{P}_m = \mathfrak{P} \left[1 - \frac{\sin \nu (m-1)}{\sin \nu m} \right].$$

Sind alle Glieder gleich, so ist jedes für die größte Gliedspannung $\Delta \mathfrak{P}_m$ zu bemessen. Für sehr lange Ketten kann man $\sin \nu m = e^{\nu m}$ setzen, dann wird der Klammerausdruck $1 - e^{-\nu}$ und die größtmögliche Spannung \mathfrak{P} für eine Gliedspannung $\Delta \mathfrak{P}_m$ wird

$$\mathfrak{P}_{(m=\infty)} = \frac{\Delta \mathfrak{P}_m}{1 - e^{-\nu}}.$$

Dieser Wert ist in Fig. 167 für c/C von 0 bis 0,1 aufgetragen, er

im unteren Bereich die Stromleitung hauptsächlich durch die Windungen, im oberen hauptsächlich quer zu den Windungen durch die parallel geschaltete Kapazität K erfolgt.

Wie bei der verlustfreien Leitung erhält man auch hier stehende Wellen, wenn durch die Spule keine Energie übertragen wird. Z. B. entsprechen der offenen oder der kurzgeschlossenen Leitung hier die Fälle der am Ende isolierten oder der geerdeten Spule, deren Anfang an einen Pol der Stromquelle angeschlossen ist, deren anderer Pol geerdet ist. Die an beide (isolierte) Pole der Stromquelle angeschlossene Spule kann dann aus zwei am isolierten Ende hintereinandergeschaltete halbe Spulen zusammengesetzt gedacht werden, von denen die eine am Anfang an die Spannung $+\frac{1}{2}\mathfrak{P}_a$, die andere am Anfang an $-\frac{1}{2}\mathfrak{P}_a$ angeschlossen ist.

Setzt man für den unteren Frequenzbereich

$$\nu = jb,$$

wo das Winkelmaß $b = \omega \sqrt{\frac{LC}{1 - \omega^2 LK}}$ ist, ferner

$$\mathfrak{Z} = Z$$

und

$$\cos \nu x = \cos jbx = \cos bx,$$

$$\sin \nu x = \sin jbx = j \sin bx,$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_x &= \mathfrak{P}_a \cos bx - j \mathfrak{S}_a Z \sin bx \\ \mathfrak{S}_x &= \mathfrak{S}_a \cos bx - j \frac{\mathfrak{P}_a}{Z} \sin bx \end{aligned} \right\} \dots \dots (275)$$

Bei isoliertem Ende ($x=l$) ist $\mathfrak{S}_l = 0$ und aus der zweiten Gleichung

$$\mathfrak{S}_a Z = j \mathfrak{P}_a \operatorname{tg} bl \dots \dots \dots (276)$$

Hiermit

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_x &= \mathfrak{P}_a (\cos bx + \sin bx \operatorname{tg} bl) = \mathfrak{P}_a \frac{\cos b(l-x)}{\cos bl} \\ \mathfrak{S}_x &= j \frac{\mathfrak{P}_a}{Z} \frac{\sin b(l-x)}{\cos bl} \end{aligned} \right\} (277)$$

Diese Gleichungen gelten, wie angegeben, auch für die an beiden Enden angeschlossene Spule, wenn $x=l$ die Spulenmitte ist.

Aus 276 folgt, daß

$$\mathfrak{S}_a = 0 \quad \text{ist für } bl = \pi, \quad 2\pi, \text{ usw.}$$

und

$$\mathfrak{S}_a = \infty \quad \text{für } bl = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \text{ usw.}$$

Je nach der Frequenz ist im ersten Fall (Klemmenstrom $= 0$) die verlustfreie Spule in Stromresonanz, im zweiten in Spannungs-

resonanz. Am isolierten Ende liegt stets ein Stromknoten und ein Spannungsbauch, ferner wieder im Abstand

$$b(l-x) = \pi, 2\pi \text{ usw.}$$

Spannungsknoten und Strombäuche bestehen in den Abständen vom Ende

$$b(l-x) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ usw.}$$

Ganz analog erhält man die Beziehungen bei geerdetem Ende.

Die beiden Frequenzbereiche mit vorwiegend sinusförmiger bzw. hyperbolischer Spannungsverteilung sind bei Berücksichtigung der Verluste nicht so scharf getrennt.

Quantitativ wird das Verhalten der wirklichen Spule durch den Kettenleiter Fig. 168 insofern unvollkommen ersetzt, als die gegenseitige Induktion der Windungen nicht richtig berücksichtigt wird. Dies scheint dadurch zum Ausdruck zu kommen, daß in der Nähe der kritischen Frequenz ω_0 der Nenner in ν (Gl. 274) nahezu Null wird, d. h. ν sehr groß und die Frequenzen für Spannungs- und Stromresonanz sehr dicht aneinander liegen müßten. Dies scheint nach Versuchen von Gothe¹⁾ nicht der Fall zu sein. Aus Versuchen von Böhm²⁾ folgt jedoch, daß ein Frequenzbereich mit wesentlich sinusförmiger Spannungsverteilung von einem solchen mit hyperbolischer Verteilung unterschieden werden kann. Wagner³⁾ hat die Untersuchung ausgedehnt durch Berücksichtigung der gegenseitigen Induktion benachbarter Windungen, die Ergebnisse der Rechnung sind qualitativ ähnlich. In ganz anderer Weise hat Rogowski⁴⁾ die Spannungsverteilung untersucht, indem er die Spule als ein Mehrfachleitersystem betrachtet. Dieser Weg dürfte der Wirklichkeit am nächsten kommen. Mit Rücksicht auf die ungleiche magnetische und elektrische Verkettung der Windungen nahe den Spulenden und in der Mitte müßte die Charakteristik sich von Windung zu Windung ändern, wodurch Reflexionen entstehen.

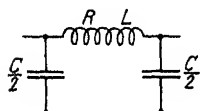


Fig. 169.

3. Eine Spulenleitung⁵⁾ mit Gliedern nach Fig. 169 kann in gewissen Frequenzbereichen als Abbildung einer Pupinleitung dienen. Es soll das Verhalten bei veränderlicher Frequenz untersucht werden.

¹⁾ Arch. f. El., Bd. IX, H. 1.

²⁾ Arch. f. El., Bd. V, S. 888.

³⁾ Arch. f. El., Bd. VI, S. 301.

⁴⁾ Arch. f. El., Bd. VII, S. 17. 240.

⁵⁾ Wagner, Arch. f. El., Bd. VIII, S. 61.

Die Ausdrücke (269) und (270) für β und ν formen wir zunächst etwas um. Da

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

wird

$$\beta = \frac{2}{\eta} \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{\beta}{\eta}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{1}{\eta \beta}} \dots \quad (278)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \frac{1}{2} \nu &= \cos \nu - 1 \\ \cos \nu &= 1 + \frac{1}{2} \eta \beta \end{aligned} \quad (279)$$

Wie für eine Leitung (S. 185) ist $\nu = a + jb$ zu setzen, worin a die Dämpfungskonstante und b das Winkelmaß ist. Es ist daher

$$\begin{aligned} \cos \nu &= \cos a \cos b - j \sin a \sin b, \\ 1 + \frac{1}{2} \eta \beta &= A + jB. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von a und b hat man die Gleichungen

$$A = \cos a \cos b, \quad B = \sin a \sin b$$

zu quadrieren und erhält durch Addition bzw. Subtraktion

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 a &= -\frac{1}{2} (1 - A^2 - B^2) + \sqrt{B^2 + \frac{1}{4} (1 - A^2 - B^2)^2} \\ \sin^2 b &= -\frac{1}{2} (1 - A^2 - B^2) - \sqrt{B^2 + \frac{1}{4} (1 - A^2 - B^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (280)$$

Für die Spulenleitung Fig. 169 ist

$$\beta = (R + j\omega L), \quad \eta = j\omega C.$$

Nach 278 wird

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (R + j\omega L) j\omega C}} \\ &= \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{1 + \frac{R}{j\omega L}}{1 - \frac{1}{4} \omega^2 LC + j\frac{1}{4} R\omega C}}. \end{aligned}$$

Für verschwindend kleinen Widerstand wird $\beta = \infty$, wenn

$$\omega = \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

ist; dies ist die (Haupt- oder) Eigenfrequenz der Spulenleitung.

Nach (279) wird

$$\cos \nu = 1 + \frac{1}{2} \eta \beta = A + jB = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC + j\frac{1}{2} R\omega C.$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} A &= 1 - \omega^2 \frac{LC}{2} = 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \\ B &= R\omega \frac{C}{2} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right). \end{aligned}$$

Wie bei der Reihen- und Parallelschaltung von Drosselspule und Kondensator, S. 24 und 54, sind auch hier nur das Frequenzverhältnis $\omega:\omega_0$ und das Widerstandsverhältnis $\varrho = R:\sqrt{\frac{L}{C}}$ maßgebend. In Fig. 170 sind für $\varrho = 0,01$ die aus Gl. 280 ermittelten

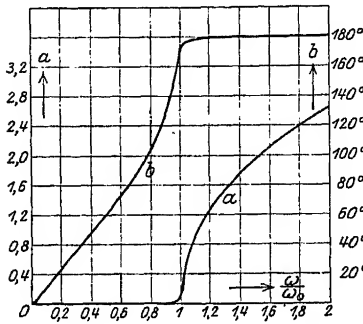


Fig. 170.

Werte der Dämpfungskonstanten a und des Winkelmaßes b für Frequenzen von 0 bis zur doppelten Eigenfrequenz aufgetragen. Die Dämpfung ist bis zur Eigenfrequenz außerordentlich klein; bei dieser ist

$A = -1$ und $B = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ im Beispiel 0,01, daher $a \approx \sin a \approx \sqrt{B} = 0,1$, bei einer 5% höheren Frequenz schon mehr als 6 mal so groß, und steigt dann beständig weiter an. Das Winkelmaß b steigt bis zur

Eigenfrequenz auf fast 180° , um bei höheren Frequenzen dicht bei diesem Wert zu bleiben. Für

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

wird

$$A = 0, \quad \sin b = 1, \quad b = 90^\circ, \quad \sin a = B = \frac{1}{\sqrt{2}} R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Schwingungen von höherer als der Eigenfrequenz werden nicht durchgelassen. Die Charakteristik ist für vernachlässigbaren Widerstand

$$3 = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

und bei sehr hohen Frequenzen

$$-j \frac{\omega_0}{\omega} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{2}{j \omega C},$$

hierbei wirkt nur der Nebenschluß-Kondensator. Die Eigenschaft, nur Schwingungen von kleinerer als der Eigenfrequenz schwach gedämpft hindurchzulassen, ist in der drahtlosen Telegraphie mit ungedämpften Wellen wertvoll, um die Oberschwingungen der Sender zu unterdrücken, durch die fremde Empfänger gestört werden. Die Spulenleitung wird zwischen Sender und Antenne geschaltet.

Das Gegenstück zur Spulenleitung ist die Kondensatorleitung,

Fig. 171. Bei kleinen Frequenzen bis zur Eigenfrequenz ist der in Reihe geschaltete Kondensator undurchlässig. Die Dämpfung ist um so größer, je niedriger die Frequenz, während sie von der Eigenfrequenz an aufwärts ebenso geringe Werte annimmt, wie die Spulenleitung unterhalb der Eigenfrequenz. Auch das Winkelmaß b zeigt das in bezug auf die Eigenfrequenz reziproke Verhalten. Diese Leitung läßt somit nur die hohen Schwingungen schwach gedämpft hindurch.

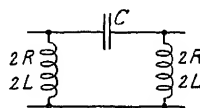


Fig. 171.

Durch Kombination von Spulen- und Kondensatorleitungen ergeben sich, wie Wagner¹⁾ gezeigt hat, entweder durch Hinzufügen von Reihenkondensatoren oder durch Nebenschlußspulen in eine Spulenleitung Ketten, die zwei Eigenfrequenzen haben, deren Dämpfungsfaktor unterhalb der ersten und oberhalb der zweiten Eigenfrequenz sehr groß ist und zwischen beiden sehr klein bleibt. Die Ketten haben somit einen scharf begrenzten Durchlässigkeitsbereich, dessen Breite man durch geeignete Bemessung einstellen kann. Sie werden zur Vielfachtelegraphie und Telephonie auf Leitungen verwendet.

Der Unterschied gegen die einfache Parallel- und Reihenschaltung von Drosselspule und Kondensator besteht darin, daß diese bei kleinen Verlusten nur für eine scharf abgegrenzte Frequenz ganz undurchlässig oder ganz durchlässig sind.

¹⁾ l. c.

Zwölftes Kapitel.

Berechnung des Verhaltens von Stromkreisen auf Grund der Konstanten des Leerlauf- und des Kurzschlußversuches.

73. Die Konstanten. — 74. Experimentelle Bestimmung der Konstanten. — 75. Spannungsänderung. — 76. Berechnung der maximalen abgegebenen Leistung. — 77. Änderung der Belastung. — 78. Wirkungsgrad. — 79. Das Arbeitsdiagramm. — 80. Beispiele. — 81. Vektorgleichung und Ortskurve.

73. Die Konstanten.

In Kap. IX S. 138 wurde für einen Transformator, in Kap. XI S. 200 für eine Leitung gezeigt, daß ihre Wirkungsweise sich durch Größen darstellen läßt, die einem Leerlauf- und einem Kurzschlußversuch entnommen werden. Auch für eine Stromverzweigung hatten wir die Berechnung durch Superposition eines Leerlauf- und eines Kurzschlußzustandes auf S. 69 gezeigt. Dieser Zusammenhang besteht wie J. L. la Cour¹⁾ gezeigt hat, für viele Stromkreise und Maschinen. Das Verhalten läßt sich immer wieder durch dieselben Beziehungen darstellen, deren Konstanten durch die beiden Versuche ermittelt werden. So wird der Wirkungsgrad eines Induktionsmotors durch dieselbe Beziehung ausgedrückt, wie der einer Leitung, der Spannungsabfall der Leitung durch dieselbe Beziehung wie für einen Transformator. Die Voraussetzung dabei ist nur, daß die Konstanten des Systems, Widerstände, Induktivitäten usf., unveränderlich sind. Induktiv gekoppelte Systeme werden dabei auf leitend verbundene reduziert (s. S. 167). Die bei einem Motor in mechanische Arbeit umgewandelte elektrische Energie erscheint in den Gleichungen als in einem Ohmschen Widerstand verbrauchte Arbeit, ist der Widerstand negativ, so bedeutet dies erzeugte elektrische Arbeit, d. h. einen Stromerzeuger.

In dem Ersatzstromkreis Fig. 172 (der schon wiederholt ver-

¹⁾ Leerlauf und Kurzschluß, Braunschweig 1904.

P_{1k} eilt gegen J_{1k} um φ_k vor, gegen J_2 um $(\varphi_k - \gamma_k)$. Es sei

$$P_{1k} = J_{1k} z_k, \quad \dots \dots \dots (285)$$

worin z_k der Scheinwiderstand bei Kurzschluß ist, und nach (284)

$$P_{1k} = J_2 C_k z_k \quad \dots \dots \dots (286)$$

c) Superposition von Leerlauf und Kurzschluß zum Belastungszustand.

Bei Belastung besteht an den sekundären Klemmen die Spannung P_2 und der Strom J_2 , ihre Phasenverschiebung ist φ_2 . P_2 bedingt primär eine Spannung P_{10} und einen Strom J_{10} , J_2 die Spannung P_{1k} und den Strom J_{1k} , die durch Gl. 281, 282, 284 und 285 bestimmt sind. Da die Gleichungen linear sind, ergeben sich Spannung und Strom an den primären Klemmen durch Addition der entsprechenden Größen bei Leerlauf und bei Kurzschluß; es wird:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_{10} + \mathfrak{P}_{1k} = \mathfrak{C}_0 \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{C}_k \mathfrak{S}_2 \delta_k \quad (287)$$

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_{10} + \mathfrak{S}_{1k} = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}_0 \eta_0 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k \quad (288)$$

Das Vektordiagramm Fig. 175 zeigt die Addition.

P_{1k} eilt gegen J_{1k} um φ_k vor, J_{1k} ist gegen J_2 um γ_k verzögert, also gegen P_2 um $\varphi_2 + \gamma_k$, und da P_2

gegen P_{10} um γ_0 voreilt, eilt P_{1k} gegen P_{10} vor um

$$\alpha = \varphi_k - \varphi_2 + (\gamma_0 - \gamma_k), \quad \dots \dots \dots (289)$$

ebenso eilt J_{1k} gegen J_{10} vor um

$$\beta = \varphi_0 - \varphi_2 + (\gamma_0 - \gamma_k) \quad \dots \dots \dots (290)$$

Zwischen den Konstanten $\eta_0, \delta_k, \mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_k$ in Gl. 281/83 und 284/85 besteht eine weitere Beziehung. Bei Leerlauf war

$$\mathfrak{P}_{10} = \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_2 \eta_a \delta_1 = \mathfrak{P}_2 (1 + \eta_a \delta_1) = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}_0$$

$$\mathfrak{C}_0 = 1 + \eta_a \delta_1 \quad \dots \dots \dots (291)$$

und nach (283)

$$\eta_a = \eta_0 \mathfrak{C}_0 \quad \dots \dots \dots (283)$$

Bei Kurzschluß ist

$$\mathfrak{S}_{1k} = \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_2 \delta_2 \eta_a = \mathfrak{S}_2 (1 + \eta_a \delta_2) = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k$$

$$\mathfrak{C}_k = 1 + \eta_a \delta_2 \quad \dots \dots \dots (292)$$

$$\mathfrak{P}_{1k} = \mathfrak{S}_{1k} \delta_1 + \mathfrak{S}_2 \delta_2 = \mathfrak{S}_{1k} \left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{\mathfrak{C}_k} \right) = \mathfrak{S}_{1k} \delta_k$$

$$\delta_k = \delta_1 + \frac{\delta_2}{\mathfrak{C}_k} \quad \dots \dots \dots (293)$$

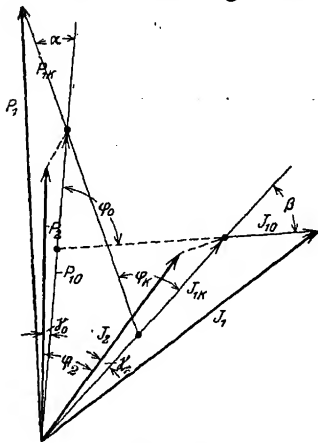


Fig. 175.

Aus Gl. 283 und 293 wird mit Rücksicht auf 291 und 292

$$\begin{aligned} \delta_k \eta_0 &= \left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{\mathfrak{C}_k} \right) \frac{\eta_a}{\mathfrak{C}_0} = \frac{\delta_1 \eta_a}{\mathfrak{C}_0} + \frac{\delta_2 \eta_a}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k} \\ &= \frac{\mathfrak{C}_0 - 1}{\mathfrak{C}_0} + \frac{\mathfrak{C}_k - 1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k} = 1 - \frac{1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k} \\ (1 - \eta_0 \delta_k) \mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k &= 1 \quad \dots \dots (294) \end{aligned}$$

Mittels dieser Gleichung kann zu je drei Konstanten die vierte bestimmt werden.

74. Experimentelle Bestimmung der Konstanten.

Nach Gl. 294 ist

$$\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k = \frac{1}{1 - \eta_0 \delta_k}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\frac{\mathfrak{P}_1}{\delta_k} = \mathfrak{S}_k$, so wird

$$\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k = \frac{\frac{\mathfrak{P}_1}{\delta_k}}{\frac{\mathfrak{P}_1}{\delta_k} - \mathfrak{P}_1 \eta_0} = \frac{\mathfrak{S}_k}{\mathfrak{S}_k - \mathfrak{S}_0}, \quad \dots \dots (294a)$$

Hierin ist J_k der Kurzschlußstrom, J_0 der Leerlaufstrom bei der primären Spannung P_1 sie sind um φ_k bzw. φ_0 gegen P_1 verzögert. Durch Strom-, Spannungs- und Leistungsmessung bei Kurzschluß und bei Leerlauf können J_k , φ_k und J_0 , φ_0 gemessen werden. Trägt man J_k und J_0 unter φ_k bzw. φ_0 gegen P_1 in das Vektordiagramm Fig. 176 auf, so ist die geometrische Differenz von J_k und J_0 die dritte Seite des Dreiecks OJ_0J_k . Daher wird nach Gl. 294 a der Betrag

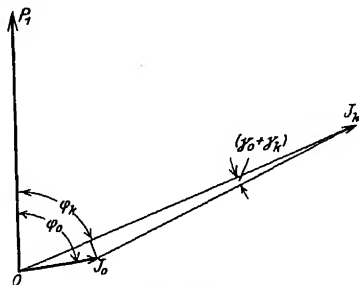


Fig. 176.

$$C_0 C_k = \frac{OJ_k}{J_0 J_k} = \frac{J_k}{\sqrt{J_k^2 + J_0^2 - 2 J_0 J_k \cos(\varphi_0 - \varphi_k)}} \quad (294b)$$

oder angenähert

$$C_0 C_k \cong \frac{J_k}{J_k - J_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_k)} \quad \dots \dots (294c)$$

Der Winkel zwischen \mathfrak{S}_k und $\mathfrak{S}_k - \mathfrak{S}_0$ ist $(\gamma_0 + \gamma_k) = \angle OJ_k J_0$

$$\operatorname{tg}(\gamma_0 + \gamma_k) = \frac{J_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_k)}{J_k - J_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_k)} \quad \dots \dots (295)$$

Mit den beiden Gleichungen 294b (oder c) und 295 kann das Produkt $C_0 C_k$ und die Summe $(\gamma_0 + \gamma_k)$ berechnet werden.

Die Einzelwerte können durch die Leerlauf- und die Kurzschlußmessung von der Sekundärseite getrennt werden.

Führt man den sekundären Klemmen die Spannung P_{20} bei offenen primären Klemmen zu, so ist der sekundäre Leerlaufstrom

$$S_{20} = \frac{P_{20} \eta_a}{1 + \eta_a \delta_2} = P_{20} \eta_0',$$

worin nach Gl. 290

$$\eta_0' = \frac{\eta_a}{1 + \eta_a \delta_2} = \frac{\eta_a}{\mathfrak{C}_k}$$

und nach Gl. 283

$$\frac{\eta_0}{\eta_0'} = \frac{\mathfrak{C}_k}{\mathfrak{C}_0} \dots \dots \dots (296)$$

Das Verhältnis der Beträge η_0 und η_0' gibt also das Verhältnis von C_k und C_0 und die Differenz der Phasenwinkel ist

$$\varphi_0 - \varphi_0' = \gamma_k - \gamma_0.$$

Da nun das Produkt $C_k C_0$ und $(\gamma_k + \gamma_0)$ bekannt sind, können C_k , C_0 , γ_k und γ_0 getrennt werden.

Schließt man die primären Klemmen kurz und führt den sekundären Klemmen Strom zu, so ergibt sich der sekundäre Kurzschlußwiderstand

$$\delta_k' = \delta_2 + \frac{\delta_1}{1 + \eta_a \delta_1} = \delta_2 + \frac{\delta_1}{\mathfrak{C}_0},$$

nach (291) war

$$\delta_k = \delta_1 + \frac{\delta_2}{\mathfrak{C}_k} = \delta_1 + \frac{\delta_2}{1 + \eta_a \delta_2},$$

daher

$$\frac{\delta_k'}{\delta_k} = \frac{1 + \eta_a \delta_2}{1 + \eta_a \delta_1} = \frac{\mathfrak{C}_k}{\mathfrak{C}_0} \dots \dots \dots (297)$$

Hiermit kann wieder das Verhältnis der Beträge und die Differenz der Phasenwinkel bestimmt werden. Zur vollständigen Ermittlung von $C_k C_0 \gamma_0 \gamma_k$ genügen drei Messungen, die vierte kann zur Kontrolle dienen.

Symmetrischer Stromkreis. Bei einem symmetrischen Stromkreis ist

$$z_1 = z_2, \quad \chi_1 = \chi_2 \\ \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_k = \mathfrak{C}, \quad \gamma_0 = \gamma_k = \gamma.$$

Bei der Leitung mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität war dies erfüllt (s. S. 201 Gl. 246), sie ist ein Beispiel für einen symmetrischen Stromkreis. Aber auch Transformatoren, Induktionsmotoren können oft als symmetrische Stromkreise betrachtet werden.

75. Spannungsänderung.

Für einen symmetrischen Stromkreis wird Gl. 287

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{C} = \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_k,$$

die in dem Diagramm Fig. 177 dargestellt ist.

Bei Leerlauf ist die primäre Spannung

$$P_{10} = P_2 C,$$

bei Belastung ist sie P_1 , die prozentuale Spannungsänderung von Leerlauf bis Belastung ist daher

$$\varepsilon = \frac{P_1 - P_{10}}{P_1} 100 = \frac{\frac{P_1}{C} - P_2}{\frac{P_1}{C}} = \frac{OB - OA}{OB} 100.$$

Hierdurch ist die Spannungsänderung für den allgemeinen Fall auf die einer Leitung mit Widerstand und Selbstinduktion zurückgeführt und kann wie dort berechnet werden (s. Kap. IV, S. 44).

Beispiel. Bei einem Einphasentransformator für 200 kVA und 10000 Volt primär bei 50 Perioden wurde gemessen

$$J_{1k} = 20 \text{ Amp.}, \quad P_{1k} = 366 \text{ Volt}, \quad N_k = 4200 \text{ Watt}.$$

Es ist daher bei normalem Strom die Wirkspannung bei Kurzschluß

$$J_{1k} z_k \cos \varphi_k = \frac{N_k}{J_{1k}} = \frac{4200}{20} = 210 \text{ Volt},$$

d. h. 2,1% der Klemmenspannung, und die Blindspannung.

$$J_{1k} z_k \sin \varphi_k = \sqrt{P_{1k}^2 - \left(\frac{N_k}{J_{1k}}\right)^2} = \sqrt{366^2 - 210^2} = 300 \text{ Volt}$$

oder 3% der Klemmenspannung.

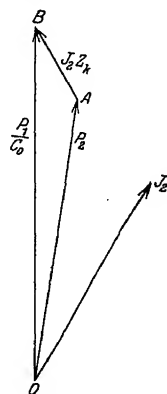


Fig. 177.

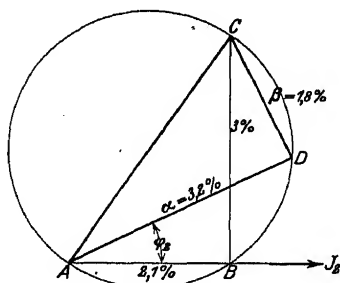


Fig. 178.

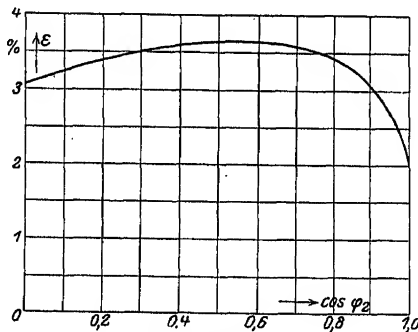


Fig. 179.

In Fig. 178 ist das Diagramm nach Kap. IV Fig. 32 aufgetragen. Für $\cos \varphi_2 = 0,9$ erhält man aus der Figur $\alpha = 3,2^\circ$, $\beta = 1,8^\circ$

$$\varepsilon = \alpha + \frac{\beta^2}{200} = 3,2 + \frac{1,8^2}{200} = 3,216^\circ.$$

Fig. 179 zeigt die Spannungsänderung für nachteilenden Strom von $\cos \varphi_2 = 0$ bis 1.

76. Berechnung der maximal abgegebenen Leistung.

Die abgegebene Leistung ist

$$N_2 = P_2 J_2 \cos \varphi_2.$$

Bei konstanter primärer Spannung und für eine bestimmte Phasenverschiebung φ_2 nimmt mit steigendem Belastungsstrom J_2 die Spannung P_2 ab. Die Leistung N_2 hat daher ein Maximum.

In der Gl. 287

$$P_1 = P_2 C_0 + J_2 C_k z_k,$$

die durch das Spannungsdreieck OAB Fig. 180 dargestellt wird, bilden

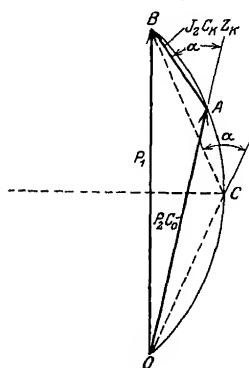


Fig. 180.

die beiden Spannungsvektoren $P_{10} = P_2 C_0$ und $P_{1k} = J_2 C_k z_k$, wie auf S. 226 gezeigt wurde, den bei konstantem Wert von φ_2 konstanten Winkel

$$\alpha = \varphi_k - \varphi_2 + (\gamma_0 - \gamma_k).$$

Das Produkt der beiden veränderlichen Spannungsvektoren ist der abgegebenen Leistung N_2 proportional und da ihre Summe konstant gleich P_1 ist, wird das Produkt am größten, wenn sie gleich sind: die abgegebene Leistung ist also am größten, wenn die Leerlaufspannung gleich der Kurzschlußspannung ist.

In diesem Falle, den Dreieck OBC in

Fig. 180 darstellt, ist

$$P_{2m} C_0 = J_{2m} C_k z_k = \frac{P_1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{daher} \quad N_{2max} = P_{2m} J_{2m} \cos \varphi_2 = \frac{P_1^2 \cos \varphi_2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} C_0 C_k z_k} \quad . \quad (298)$$

Setzt man

$$\frac{P_1}{z_k} = J_k,$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha = 1 + \cos (\varphi_k - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k)$$

und nach Gl. 294c

$$C_0 C_k \simeq \frac{J_k}{J_k - J_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_k)},$$

so wird

$$N_{2max} = \frac{P_1}{2} \cdot \frac{J_k - J_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_k)}{1 + \cos(\varphi_k - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k)} \cos \varphi_2 \quad (299)$$

Die maximale Leistung hängt von φ_2 ab. Das absolute Maximum erhält man durch

$$\frac{dN_{2max}}{d\varphi_2} = 0,$$

wenn

$$-\sin \varphi_2 [1 + \cos \alpha] = \cos \varphi_2 \sin \alpha,$$

oder

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -(\varphi_k + \gamma_0 - \gamma_k) \\ \alpha &= 2(\varphi_k + \gamma_0 - \gamma_k) = -2\varphi_2. \end{aligned}$$

Da φ_2 negativ wird, ergibt sich das absolute Maximum der Leistung bei Voreilung von J_2 gegen P_2 .

77. Änderung der Belastung.

Ändert sich die Belastung durch Hinzuschalten eines Zweiges, so ändern sich bei konstanter Primärspannung die sekundäre Spannung, der Gesamtstrom und die Leistung. Die Änderung dieser Größen wird durch die Netzkonstanten wie folgt ermittelt. Dividiert man Gl. 287 durch \mathfrak{C}_0 und setzt $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{z}_2$ ein, so wird

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{C}_0} = \mathfrak{S}_2 \left(\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_k \frac{\mathfrak{C}_k}{\mathfrak{C}_0} \right) \quad \dots \dots \dots (287a)$$

Hierin ist nach Gl. 297 $\mathfrak{z}_k \frac{\mathfrak{C}_k}{\mathfrak{C}_0} = \mathfrak{z}_k'$ der sekundäre Scheinwiderstand bei Kurzschluß der primären Klemmen.

In Gl. 287a steht links die Leerlaufspannung an den Klemmen der Belastung \mathfrak{P}_{20} , die vor der Belastungsänderung bestand, daher ist

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{\mathfrak{P}_{20}}{\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_k'} \quad \dots \dots \dots (300)$$

Der Belastungsstrom J_2 ergibt sich dadurch, daß man die Leerlaufspannung auf die Reihenschaltung von \mathfrak{z}_2 und dem sekundären Scheinwiderstand bei Kurzschluß wirkend denkt. Diesen hier allgemein abgeleiteten Satz hatten wir schon in Kap. V S. 70 für die Brückenschaltung bewiesen.

Die Spannung ändert sich im Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{P}_{20}} = \frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_k'} \quad \dots \dots \dots (301)$$

Setzt man aus Gl. 287 $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k$ in Gl. 288 ein, so wird

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{P}_1 \eta_0 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k (1 - \delta_k \eta_0),$$

wofür mit Rücksicht auf (294) gesetzt werden kann

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{P}_1 \eta_0 + \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{C}_0} \dots \dots \dots (302)$$

$\mathfrak{P}_1 \eta_0 = \mathfrak{S}_{10}$ ist der primäre Strom vor der Belastungsänderung, $\frac{1}{\mathfrak{C}_0} = \frac{\mathfrak{P}_{20}}{\mathfrak{P}_1}$ ist das Verhältnis der sekundären Leerlaufspannung zur primären. Mit diesem Verhältnis ist der Belastungsstrom \mathfrak{S}_2 zu multiplizieren, um die Änderung des primären Stromes zu erhalten.

Die Leistung berechnet sich als reeller Teil des Produktes aus dem Vektor der Spannung \mathfrak{P}_1 und dem konjugiert komplexen Vektor des Stromes (s. S. 34 Gl. 48).

$$N_0 = [\mathfrak{P}_1 \mathfrak{S}_{10}]_r$$

ist die Leistung vor der Belastungsänderung.

Die Leistungsänderung ist, wenn \mathfrak{C}_0^k die zu \mathfrak{C}_0 konjugierte Zahl ist,

$$N_1 - N_0 = \left[\mathfrak{P}_1 \frac{\mathfrak{S}_2^k}{\mathfrak{C}_0^k} \right]_r.$$

Nun ist $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_{20} \mathfrak{C}_0$ daher auch

$$N_1 - N_0 = \left[\mathfrak{P}_{20} \mathfrak{S}_2^k \left(\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}_0^k} \right) \right]_r \dots \dots \dots (303)$$

Es ist

$$\mathfrak{C}_0 = C_0 e^{j\gamma_0}, \quad \mathfrak{C}_0^k = C_0 e^{-j\gamma_0}, \quad \frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}_0^k} = e^{j2\gamma_0}.$$

Ist $\gamma_0 = 0$, d. h. C_0 reell, so wird der Faktor 1, dann ist der reelle Teil des Vektorproduktes $[\mathfrak{P}_{20} \mathfrak{S}_2^k]_r$ die primäre Leistungsänderung. Sonst ist

$$\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}_0^k} = \cos 2\gamma_0 + j \sin 2\gamma_0.$$

Man erhält dann die Leistungsänderung als Summe des mit $\cos 2\gamma_0$ multiplizierten reellen Teiles des Vektorproduktes $[\mathfrak{P}_{20} \mathfrak{S}_2^k]$ und des mit $\sin 2\gamma_0$ multiplizierten imaginären Teiles.

$$N_1 - N_0 = [\mathfrak{P}_{20} \mathfrak{S}_2^k]_r \cos 2\gamma_0 - [\mathfrak{P}_{20} \mathfrak{S}_2^k]_j \sin 2\gamma_0.$$

78. Wirkungsgrad.

Der Wirkungsgrad η einer Anlage ist das Verhältnis der Abgabe an den sekundären Klemmen zur Aufnahme an den primären Klemmen

$$\eta = \frac{N_2}{N_1} = \frac{P_2 J_2 \cos \varphi_2}{P_1 J_1 \cos \varphi_1}.$$

Um die Leistungen aus den Konstanten der Leerlauf- und der Kurzschlußmessung zu berechnen, beziehen wir alle Größen auf den Belastungsstrom J_2 , dem wir die Phase 0 geben, und auf die Belastungsimpedanz z_2 . Es wird dann:

$$\mathfrak{P}_2 = J_2 z_2 e^{j\varphi_2}, \quad N_2 = J_2^2 z_2 \cos \varphi_2.$$

In Gl. 287 und 288 wird dann:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= C_0 J_2 z_2 e^{j(\varphi_2 + \gamma_0)} + C_k J_2 z_k e^{j(\varphi_k + \gamma_k)} \\ \mathfrak{S}_1 &= C_k J_2 e^{j\gamma_k} + C_0 J_2 z_2 y_0 e^{j(\varphi_2 + \gamma_0 + \gamma_0)} \end{aligned} \right\}. \quad (304)$$

Der reelle Teil des Produktes aus \mathfrak{P}_1 und dem zu \mathfrak{S}_1 konjugierten Vektor ergibt:

$$\begin{aligned} N_1 &= J_2^2 [z_2 C_0 C_k \{ \cos(\varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k) + z_k y_0 \cos(\varphi_2 + \varphi_0 - \varphi_k + \gamma_0 - \gamma_k) \} \\ &\quad + z_2^2 C_0^2 y_0 \cos \varphi_0 + C_k^2 z_k \cos \varphi_k] = J_2^2 N, \\ \eta &= \frac{N_2}{N_1} = \frac{J_2^2 z_2 \cos \varphi_2}{J_2^2 N} = \frac{z_2 \cos \varphi_2}{N}. \end{aligned}$$

Der Wirkungsgrad ist von z_2 und φ_2 abhängig. Um das Maximum zu erhalten, bilde man:

$$\frac{d\eta}{dz_2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{d\varphi_2} = 0.$$

Die erste Bedingung für veränderliches z_2 und konstanten Phasenwinkel ergibt:

$$z_2 = \frac{C_k}{C_0} \sqrt{\frac{z_k \cos \varphi_k}{y_0 \cos \varphi_0}} = \frac{C_k}{C_0} \sqrt{\frac{r_k}{g_0}}, \quad \dots \quad (305)$$

worin $r_k = z_k \cos \varphi_k$ und $g_0 = y_0 \cos \varphi_0$ gesetzt ist.

Diese Bedingung können wir wie folgt deuten. Es ist:

$$z_2 = \frac{P}{J_2^2}, \quad P_2 C_0 = P_{10}, \quad J_2 C_k = J_{1k},$$

durch Einsetzen in Gl. 305 und Quadrieren wird:

$$P_{10} g_0 = J_{1k}^2 r_k. \quad \dots \quad (306)$$

Links stehen die Leerlaufverluste, wenn an den sekundären offenen Klemmen die Spannung P_2 besteht, rechts die Kurzschlußverluste, wenn über die sekundären kurzgeschlossenen Klemmen der Strom J_2 fließt. Die Gleichheit dieser Verluste bestimmt das Verhältnis von P_2 zu J_2 , bei dem der Wirkungsgrad ein Maximum ist.

Die zweite Differentiation für konstantes z_2 und veränderlichen Phasenwinkel φ_2 ergibt nach Einsetzung des Wertes für z_2 aus Gl. 305 wobei die kleine Winkeldifferenz $(\gamma_0 - \gamma_k)$ vernachlässigt wurde

$$z_2 \sin \varphi_2 = \frac{1}{2 C_0 C_k} (y_0 \sin \varphi_0 z_2^3 C_0^2 - z_k \sin \varphi_k C_k^2). \quad (307)$$

Setzt man hierin wieder

$$z_2 = \frac{P_2}{J_2}, \quad P_2 C_0 = P_{10}, \quad J_2 C_k = J_{1k},$$

$$z_k J_{1k} = P_{1k} \quad \text{und} \quad P_{10} y_0 = J_{10}.$$

so wird

$$P_{10} J_{1k} \sin \varphi_2 = \frac{1}{2} (P_{10} J_{10} \sin \varphi_0 - P_{1k} J_{1k} \sin \varphi_k). \quad (307a)$$

Diese Gleichung sagt: Die Blindleistung, die sich aus Leerlaufspannung und Kurzschlußstrom für die betreffende Phasenverschiebung φ_2 ergibt, ist die halbe Differenz der Blindleistungen bei Leerlauf und bei Kurzschluß. Hierbei ist φ_k im allgemeinen positiv, d. h. P_{1k} eilt meist gegen J_{1k} vor. Der Phasenwinkel φ_0 von y_0 ist bei Leitungen mit Ladeströmen positiv, J_{10} eilt gegen P_{10} vor, bei Maschinen und Transformatoren meist negativ.

Ist φ_0 positiv und der Klammerausdruck ebenfalls positiv, so ist φ_2 positiv, P_2 soll gegen J_2 voreilen, die Belastung soll induktiv sein, dies ist bei Kabeln der Fall. Ist hingegen φ_0 auch negativ, so wird φ_2 negativ, für den besten Wirkungsgrad müßte die Belastung kapazitiv sein.

Setzen wir in Gl. 307:

$$y_0 \sin \varphi_0 = b_0, \quad z_k \sin \varphi_k = x_k,$$

und die Werte aus Gl. 305 ein, so wird

$$\sin \varphi_2 = \frac{b_0 r_k - g_0 x_k}{2 \sqrt{g_0 r_k}} \quad \dots \quad (308)$$

Mit den Ausdrücken (305) und (307) wird nun der größte Wirkungsgrad:

$$\eta_{max} = \frac{1}{C_0 C_k (1 + r_k g_0 + x_k b_0 + 2 \cos \varphi_2 \sqrt{r_k g_0})}. \quad (309)$$

Für einen symmetrischen Stromkreis ist $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_k$; dann wird allgemein das Verhältnis der primären Spannung zum primären Strom nach Gl. 304

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{S}_1} = \frac{z_2 e^{j\varphi_2} + z_k e^{j\varphi_k}}{1 + y_0 e^{j\varphi_0} z_2 e^{j\varphi_2}}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $z_2 e^{-j\varphi_2}$ und setzt die Werte für z_2 und φ_2 für den maximalen Wirkungsgrad nach Gl. 305 und 307 ein, so ergibt sich leicht:

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{S}_1} = z_2 e^{-j\varphi_2}.$$

In einem symmetrischen Stromkreis stehen also Strom und Spannung bei dem größten Wirkungsgrade primär und sekundär im gleichen Verhältnis, nur hat die primäre Phasenverschiebung entgegengesetztes Vorzeichen als die sekundäre.

Beispiel. Eine Dreiphasen-Hochspannungsleitung für 110 000 Volt 120 qmm für 50 Per./sek mit den Konstanten für eine Phase

$$R = 0,15 \text{ Ohm/km}, \quad L = 1,3 \text{ mH/km}, \quad C = 0,009 \text{ } \mu\text{F/km},$$

$$A = 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ Siemens/km}.$$

In nachstehender Tabelle sind für eine sekundäre Linienspannung von 110 000 Volt und für Längen l von 100 bis 500 km die Scheinwiderstände z_2 , die Phasenströme J_2 , der Leistungsfaktor $\cos \varphi_2$, die Leistung N_2 für den größten möglichen Wirkungsgrad berechnet.

l	100	200	300	400	500	km
z_2	700	694	673	647	626	Ohm
J_2	91	91,6	94,5	98,4	101,6	Amp.
$\cos \varphi_2$	0,998	0,991	0,98	0,968	0,951	
N_2	17 250	17 280	17 640	18 100	18 360	kW
η_{max}	95,8	91,9	88,0	84,9	82,7	%
J_{10}	18,0	36,0	53,3	70,2	85,6	Amp.

Hieraus ist ersichtlich, daß der beste Wirkungsgrad bei einer sehr niederen Strombelastung eintritt ($< 1 \text{ Amp./mm}^2$). Die mit höchstem Wirkungsgrad übertragbare Leistung ist fast unabhängig von der Leitungslänge. Freilich ist zu berücksichtigen, daß das Maximum flach verläuft. Der beste Wirkungsgrad selbst nimmt mit steigender Länge ziemlich schnell ab. Die Erklärung dafür gibt der in der letzten Zeile stehende Leerlaufstrom J_{10} , der bei 500 km Leitungslänge schon fast ebenso groß ist wie der Belastungsstrom. Bei Verwendung einer Doppelleitung würden der Belastungsstrom und auch der Ladestrom nahezu verdoppelt, der Wirkungsgrad würde nur unwesentlich verändert.

79. Das Arbeitsdiagramm.

Das Arbeitsdiagramm stellt bei konstanter primärer Spannung P_1 die primären und sekundären Ströme, die sekundäre Spannung, die Leistungsaufnahme und -abgabe dar, wenn die Belastung sich bei konstanter Phasenverschiebung φ_2 ändert.

Auf S. 232, Gl. 302 war gezeigt, daß

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{P}_1 y_0 + \frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{C}_0} \quad (302)$$

ist; der primäre Strom J_1 setzt sich zusammen aus dem Leerlaufstrom $J_0 = P_1 y_0$ und dem dem sekundären Strom proportionalen $\frac{J_2}{C_0}$. Trägt man in Fig. 181 $J_0 = OP_0$ um φ_0 gegen P_1 verzögert auf, und ist $P_0 P$ ein beliebiger Wert von $\frac{J_2}{C_0}$, so ist OP der Primärstrom J_1 .

Nun wird aus Gl. 287 S. 226 durch beiderseitige Division mit $\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k \delta_k$:

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k \delta_k} = \frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{C}_k \delta_k} + \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{C}_0} \dots \dots \dots (287b)$$

Nach S. 226 bilden $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{P}_{10}$ und $\mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k \delta_k = \mathfrak{P}_{1k}$ den konstanten Winkel

$$\alpha = \varphi_k - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k,$$

daher bilden die ihnen proportionalen Ströme

$$\frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{C}_k \delta_k} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{C}_0}$$

in Gl. 287b ebenfalls diesen Winkel.

Trägt man in Fig. 181 an $P_0 P = \frac{J_2}{C_0}$ unter Winkel α die Strecke

$$P P_k = \frac{P_2}{C_k z_k}$$

an, so ist die Summe nach Gl. (287b) konstant

$$P_0 P_k = \frac{P_1}{C_0 C_k z_k}.$$

Die Strecken OP_0 und $P_0 P_k$, und daher ihre Summe, sind konstante Ströme, es ist

$$OP_k = OP_0 + P_0 P_k = \mathfrak{P}_1 \eta_0 + \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k \delta_k} = \frac{\mathfrak{P}_1}{\delta_k} \left(\delta_k \eta_0 + \frac{1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k} \right),$$

und da nach Gl. 294:

$$\eta_0 \delta_k + \frac{1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k} = 1,$$

wird

$$OP_k = \frac{\mathfrak{P}_1}{\delta_k} = \mathfrak{S}_k$$

der Kurzschlußstrom bei der Spannung P_1 , er ist gegen P_1 um φ_k verzögert.

Die Vektoren von den drei festen Punkten O , P_0 und P_k nach dem Punkt P stellen also $OP = J_1$, $P_0 P = \frac{J_2}{C_0}$ und $PP_k = \frac{P_2}{C_k z_k}$ dar. Da $P_0 P$ und PP_k die konstante Summe $P_0 P_k$ haben und den konstanten Winkel α bilden, bewegt sich der Punkt P bei veränderlicher Belastung auf dem Kreis über $P_0 P_k$ als Sehne, mit dem Zentriwinkel $P_0 M P_k = 2\alpha$. Jedem Punkt P des Kreises entspricht ein anderer Belastungszustand.

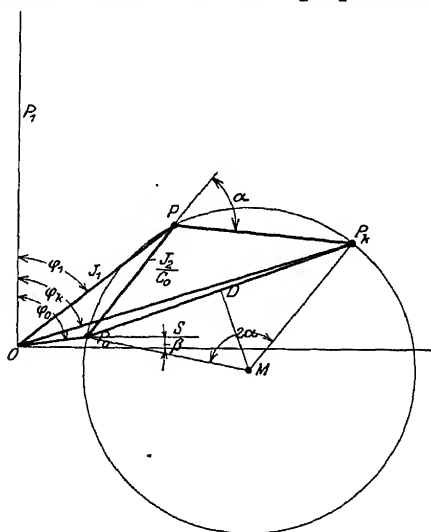


Fig. 181.

Konstruktion des Kreises.

Hat man durch Leerlauf- und Kurzschlußmessung $J_0, \varphi_0, J_k, \varphi_k$ ermittelt, so trägt man $J_k = OP_k$ unter φ_k und $J_0 = OP_0$ unter φ_0 gegen P_1 auf. Der Mittelpunkt M des Kreises liegt zunächst auf der Mittelsenkrechten DM auf P_0P_k . Als zweiten Ort kann man den Radius P_0M wählen, der mit der Sehne P_0P_k den Winkel $90^\circ - \alpha$ bildet. Nach S. 227 ist

$$\sphericalangle OP_kP_0 = \gamma_0 + \gamma_k.$$

P_0P_k bildet daher mit der Richtung von P_1 , d. h. der Vertikalen in Fig. 181, den Winkel $\varphi_k - (\gamma_0 + \gamma_k)$ oder mit der Horizontalen

$$\sphericalangle P_kP_0S = 90^\circ - \varphi_k + \gamma_0 + \gamma_k.$$

Daher bildet der Radius P_0M mit der Horizontalen den Winkel $\beta = MP_0S = P_kP_0M - P_kP_0S$

$$= 90^\circ - \alpha - [90^\circ - \varphi_k + \gamma_0 + \gamma_k] = \varphi_k - (\gamma_0 + \gamma_k) - \alpha.$$

Da

$$\alpha = \varphi_k - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k$$

ist, wird

$$\beta = \varphi_2 - 2\gamma_0 \quad \dots \quad (310)$$

Für einen symmetrischen Stromkreis ist $\gamma_0 = \gamma_k$, daher

$$2\gamma_0 = \gamma_0 + \gamma_k = OP_kP_0,$$

$$\beta = \varphi_2 - (\gamma_0 + \gamma_k) = \varphi_2 - OP_kP_0.$$

Bei induktionsfreier Belastung, $\varphi_2 = 0$, wird

$$\beta = -2\gamma_0.$$

P_0M liegt dann oberhalb P_0S und für den symmetrischen Stromkreis wird

$$\beta = -OP_kP_0.$$

Darstellung der Leistungen im Diagramm.

Zugeführte Leistung. Der Vektor $OP = J_1$ bildet mit der Richtung der Klemmenspannung P_1 den primären Phasenverschiebungswinkel φ_1 . Die Ordinate $PN = J_1 \cos \varphi_1$ (Fig. 182) ist daher bei konstanter Spannung P_1 proportional der zugeführten Leistung $N_1 = P_1 J_1 \cos \varphi_1$. Der Abstand eines Kreispunktes von der Abszissenachse ist also ein Maß für die primär zugeführte Leistung. Für alle Kreispunkte, die unterhalb der Abszissenachse liegen, ist sie negativ, sie ist eine abgegebene Leistung, entsprechend einem generatorischen Betriebszustand.

Sekundär abgegebene Leistung. In dem Dreieck P_0PP_k war

$$P_0P = \frac{J_2^2}{C_0} \quad \text{und} \quad PP_k = \frac{P_2}{C_k z_k},$$

daher ist der Inhalt des Dreiecks

$$\frac{1}{2} P_0P \cdot PP_k \sin \alpha = \frac{1}{2} J_2 P_2 \frac{\sin \alpha}{C_0 C_k z_k}$$

proportional der Leistung $N_2 = P_2 J_2 \cos \varphi_2$ an den sekundären Klemmen. Da die Grundlinie des Dreiecks $P_0 P_k = \frac{P_1}{C_0 C_k z_k}$ ist, ist die Höhe

$$PH = \frac{J_2 P_2 \sin \alpha}{P_1} = \frac{N_2 \sin \alpha}{P_1 \cos \varphi_2}.$$

Ein Lot PL von P auf den Radius $P_0 M$ bildet mit $P_0 P_k$ den Winkel $P_0 BL = PBH = \alpha$. Daher ist

$$PB = \frac{PH}{\sin \alpha} = \frac{N_2}{P_1 \cos \varphi_2}.$$

Der Abstand eines Kreispunktes von der Geraden $P_0 P_k$ ist proportional der sekundären Leistung.

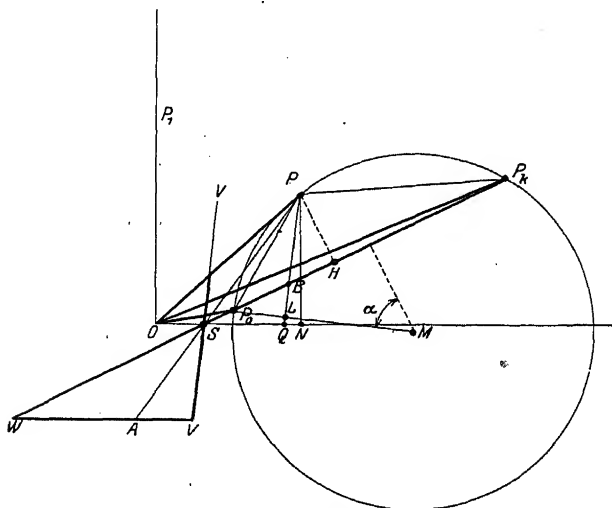


Fig. 182.

Wirkungsgrad. Da der Radius $P_0 M$ mit der Abszissenachse den Winkel $(\varphi_2 - 2\gamma_0)$ bildet, ist auch der Winkel zwischen PL und PN : $\angle LPN = (\varphi_2 - 2\gamma_0)$.

Es war

$$PN = \frac{N_1}{P_1} \quad \text{und} \quad PB = \frac{N_2}{P_1 \cos \varphi_2},$$

daher

$$PQ = \frac{PN}{\cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)} = \frac{N_1}{P_1 \cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)},$$

$$\frac{PB}{PQ} = \frac{N_2 \cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)}{N_1 \cos \varphi_2} = \eta \frac{\cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)}{\cos \varphi_2}.$$

Das Verhältnis der sekundären Leistung N_2 zur primären Leistung N_1 ist der Wirkungsgrad η . Er wird, abgesehen von dem Faktor $\frac{\cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)}{\cos \varphi_2}$, durch das Verhältnis $PB:PQ$ dargestellt.

Da γ_0 ein kleiner Winkel ist, ist der Faktor sehr nahe gleich 1.

Bequemer läßt sich der Wirkungsgrad noch in folgender Weise ablesen. Man verlängert P_0P_k über P_0 und zieht durch ihren Schnitt S mit der Abszissenachse eine Parallele VV zu PL , also senkrecht zum Radius P_0M . Eine Parallele WV zur Abszissenachse bringt man mit der Verlängerung des Strahles PS zum Schnitt in A , dann ist

$$\triangle AVS \sim \triangle SQP, \quad \triangle WVS \sim \triangle SQB,$$

daher

$$\begin{aligned} AV:VS &= SQ:PQ, \\ WV:VS &= SQ:BQ, \end{aligned}$$

durch Division wird

$$\frac{AV}{WV} = \frac{BQ}{PQ}$$

und

$$\frac{WA}{WV} = \frac{WV - AV}{WV} = \frac{PQ - BQ}{PQ} = \frac{PB}{PQ} = \frac{N_2 \cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)}{N_1 \cos \varphi_2}.$$

Der Strahl PA schneidet von der konstanten Strecke WV ein Stück WA ab, das, abgesehen von dem Korrektionsfaktor, die sekundäre Leistung in demselben Maßstab darstellt, in dem WV die primäre Leistung darstellt. AV ist in dem gleichen Maßstab der Verlust, als Differenz der primären und sekundären Leistungen. Der Abstand eines Punktes A und daher auch eines Kreispunktes P von der Geraden VV , die senkrecht auf dem Radius steht, ist somit dem Verlust proportional.

80. Beispiele.

1. Das Arbeitsdiagramm des Mehrphasen-Induktionsmotors.

In Kap. X S. 176 wurde gezeigt, daß das Verhalten des Induktionsmotors bezüglich Stromaufnahme und Leistung gleich ist dem eines induktionsfrei belasteten Transformators.

Von der auf die sekundäre Wicklung, den Läufer, übertragenen Leistung, die mit N_a bezeichnet wurde, ist ein Teil, entsprechend der „Schlüpfung“ s des Läufers gegen das Drehfeld der Stromwärmeverlust in der Wicklung. Dieser ist bezogen auf eine Statorphase

$$J_2^2 R_2 = s N_a$$

und die pro Phase auf den Läufer übertragene Leistung

$$N_a = J_2^2 \frac{R_2}{s}.$$

Die Differenz ist die mechanische Leistung

$$N_m = J_2^2 R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right),$$

so daß der Transformator, durch den der Induktionsmotor ersetzt wird, an den sekundären Klemmen die Spannung

$$P_2 = J_2 R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$$

und den Belastungswiderstand $R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$ besitzt (s. das Ersatzschema Fig. 140 S. 176.

Das Arbeitsdiagramm ist durch den Leerlaufstrom, den Kurzschlußstrom und den Phasenverschiebungswinkel φ_2 der Belastung bestimmt. Da die mechanische Belastung des Motors einer induktionsfreien elektrischen Belastung äquivalent ist, ist $\varphi_2 = 0$.

Den Kurzschlußzustand erhält man, wenn der Belastungswiderstand

$$R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = 0$$

ist, d. h. wenn $s = 1$ ist, also bei stillstehendem Läufer.

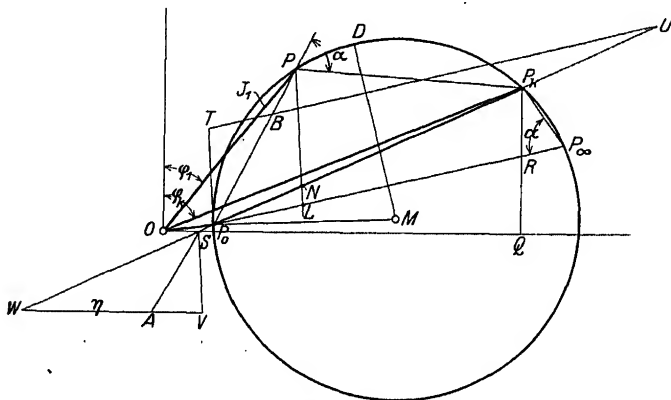


Fig. 183.

Bei Leerlauf ist der Belastungswiderstand unendlich groß, ihm entspricht $s = 0$, d. h. der „synchron“ mit dem Drehfeld rotierende Läufer. Da hierbei kein Strom im Läufer entsteht, ist das Drehmoment Null. Die synchrone Geschwindigkeit ist die, der ein vollständig entlasteter Motor zustrebt. Wird er belastet, so schlüpft er

um einen bestimmten Betrag, bei dem ein solcher Strom entsteht, daß das Drehmoment, das er mit dem Drehfeld bildet, dem Belastungsmoment das Gleichgewicht hält.

Trägt man den Leerlaufstrom J_0 und den Kurzschlußstrom J_k , die durch Messung ermittelt seien, in das Diagramm Fig. 183 ein, so liegt der Mittelpunkt M des Kreises zunächst auf der Mittelsenkrechten auf P_0P_k . Als zweiten Ort könnte man den Winkel β wie in Fig. 181 antragen. Eine andere Konstruktion ist folgende. Wie an Fig. 181 gezeigt wurde, ist der Zentriwinkel

$$P_0MP_k = 2\alpha,$$

worin allgemein

$$\alpha = \varphi_k - \varphi_2 + \gamma_k - \gamma_0$$

ist. Der Induktionsmotor ist meist ein symmetrischer Stromkreis, d. h. es ist $\gamma_k = \gamma_0$, und da $\varphi_2 = 0$ ist, wird

$$\alpha = \varphi_k.$$

Man trägt also an P_0P_k den

$$\sphericalangle P_kP_0M = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \varphi_k$$

an.

Das Arbeitsgebiet des Motors von „synchroner“ Geschwindigkeit bis zum Stillstand ist der obere Bogen P_0PP_k des Kreises. Man entnimmt dem Diagramm die primären Ströme $J_1 = OP$ und deren Phasenverschiebungswinkel φ_1 , die primär zugeführte Leistung ist der Abstand der Punkte P von der Abszissenachse, die sekundäre (die mechanische) Leistung ist der Abstand der Kreispunkte von der Leistungslinie P_0P_k , und das Verhältnis von abgegebener zu zugeführter Leistung, den Wirkungsgrad η , zeigt die nach den auf S. 239 für Fig. 182 gegebenen Regeln eingetragene Wirkungsgradlinie $W-V$.

Bei dem Motor interessiert noch die Darstellung des Drehmomentes und der Geschwindigkeit, die wir wie folgt im Diagramm ermitteln.

Das Drehmoment ist proportional der auf den Läufer übertragenen Leistung

$$N_a = J_2^2 \frac{R_2}{s}.$$

Da

$$P_0P = \frac{J_2^2}{C_0} \quad \text{und hier} \quad PP_k = \frac{P_2}{C_k z_k} = \frac{J_2 R_2}{C_k z_k} \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$$

ist, wird für $C_0 = C_k$

$$\frac{PP_k}{P_0P} = \frac{R_2}{z_k} \left(\frac{1}{s} - 1 \right). \quad \dots \dots \dots (311)$$

Nehmen wir an, der Läufer werde mit unendlich großer Geschwindigkeit angetrieben ($s = \infty$), so muß auch diesem ideellen Zustand ein Kreispunkt entsprechen. Hierbei sind N_a und das Drehmoment Null, weil bei unendlich großer Läuferfrequenz J_2 genau um 90° gegen die EMK verzögert ist. Für $s = \infty$ ist die Leistung N_m gleich $-J_2^2 R_3$, das negative Vorzeichen bedeutet, daß der Stromwärmeverlust dem Läufer mechanisch zugeführt wird.

Sei P_∞ der Kreispunkt, der diesem Zustand entspricht, so ist für ihn nach Gl. 311

$$-\frac{P_\infty P_k}{P_0 P_\infty} = \frac{P_k P_\infty}{P_0 P_\infty} = \frac{R_3}{z_k} \dots \dots \dots (312)$$

und durch Division beider Gleichungen folgt

$$\frac{P P_k}{P_0 P} \frac{P_0 P_\infty}{P_k P_\infty} = \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \dots \dots \dots (313)$$

P_∞ kann nicht experimentell aufgenommen werden. Gl. 312 gibt aber einen Anhalt für seine Konstruktion. Die Ordinate des Kurzschlußpunktes P_k ist

$$P_k Q = OP_k \cos \varphi_k = OP_k \cdot \frac{R_k}{z_k},$$

ein Maß für den Kurzschlußwiderstand R_k , wenn OP_k die Kurzschlußimpedanz z_k darstellt. Diese Größen werden bei Kurzschluß gemessen. Ebenso kann der Läuferwiderstand R_3 gemessen oder berechnet werden. Trägt man ihn gleich $P_k R$ auf $P_k Q$ ab, so ist

$$\frac{P_k R}{OP_k} = \frac{R_3}{z_k}.$$

Dieses Verhältnis soll nach Gl. 312 zwischen $P_k P_\infty$ und $P_0 P_\infty$ bestehen, und da $P_0 P_\infty P_k = \alpha$, $OP_k Q = \varphi_k$, und, wie gezeigt, hier $\alpha = \varphi_k$ ist, macht man

$$\Delta P_0 P_k P_\infty \sim \Delta OP_k R,$$

indem man

$$\sphericalangle P_k P_0 P_\infty = \sphericalangle P_k OR$$

anträgt und findet P_∞ .

Aus Gl. 313 findet man nun das Drehmoment und die Schlüpfung wie folgt. Fällt man von P ein Lot auf den Radius $P_0 M$, so bildet dieses mit der Geraden $P_0 P_k$ den Winkel $P_0 N L = \alpha$.

Nun ist

$$\Delta P_0 N L \sim \Delta P_0 P_\infty P_k \quad \text{und} \quad \Delta P_0 N P \sim \Delta P_0 P P_k,$$

daher

$$\frac{P_0 P_\infty}{P_k P_\infty} = \frac{P_0 N}{NL} \quad \text{und} \quad \frac{P P_k}{P_0 P} = \frac{PN}{P_0 N},$$

und hiermit wird nach Gl. 313

$$\frac{PN}{NL} = \left(\frac{1}{s} - 1 \right).$$

Nun ist der Abstand PN des Kreispunktes P von der Geraden P_0P_k ein Maß für die abgegebene Leistung $J_2^2 R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$, daher ist NL im gleichen Maßstab der Stromwärmeverlust $J_2^2 R_2$ und PL als Summe von beiden $J_2^2 \frac{R_2}{s}$ die auf den Läufer übertragene Leistung und das Drehmoment. Der Abstand eines Kreispunktes von der Geraden P_0P_∞ ist ein Maß für das Drehmoment, die Gerade P_0P_∞ heißt die Drehmomentlinie. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreis bestimmen die Zustände, bei denen das Drehmoment Null ist, nämlich bei Leerlauf (Synchronismus) und bei unendlicher Geschwindigkeit.

Es verhält sich

$$NL:PN:PL = s:(1-s):1.$$

Bequemer ist folgende Darstellung: Zieht man eine Parallele TU zu P_0P_∞ zwischen der Kreistangente P_0T und der Geraden P_0P_k , und ist B der Schnitt des Vektors P_0P mit dieser Geraden TU , so folgt aus den ähnlichen Dreiecken

$$P_0TB \sim PLP_0 \text{ und } P_0TU \sim P_0LN$$

$$TB:TU = NL:PL = s:1.$$

Der Abschnitt TB ist also proportional der Schlüpfung s und der Abschnitt BU der Geschwindigkeit $(1-s)$.

Das größte Drehmoment ergibt sich in D auf dem Lot MD auf der Drehmomentlinie. Punkt D teilt das Arbeitsgebiet des Motors in zwei Teile. Von P_0 bis D entspricht einer vergrößerten Schlüpfung eine Zunahme des Drehmomentes, hier ist der Betrieb stabil, von D bis P_k entspricht einer Zunahme der Schlüpfung eine Abnahme des Drehmomentes, hier ist der Betrieb unstabil. D ist die Stabilitätsgrenze.

Ebenso wie man die mechanische Belastung des Motors durch eine gedachte elektrische ersetzt, kann man sie auch durch eine wirkliche elektrische ersetzen, ohne daß sich an der Stromaufnahme und dem Drehmoment etwas ändert. Hierzu schaltet man einen Vorschaltwiderstand in den Rotor. Ist er $R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$, so hat der Motor bei Stillstand dasselbe Drehmoment und denselben Strom, wie beim Lauf bei der Schlüpfung s , ohne Vorschaltwiderstand. Durch Abstufung der Widerstände kann man dem Motor alle Anlaufdrehmomente geben, die er beim Lauf vom Stillstand bis Synchronismus entwickelt.

In Fig. 184 sind die aus dem Diagramm ermittelten Werte des Stromes J , des Leistungsfaktors $\cos \varphi$, des Wirkungsgrades η und der Schlüpfung als Funktion der Belastung N_2 bis zur maximalen Leistung aufgetragen. Der Strom ist in Prozenten des Kurzschlußstromes dargestellt.

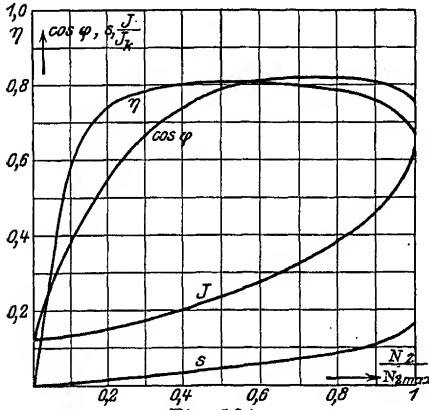


Fig. 184.

Elektrotechnik 1899) angegeben.

Analog könnte man die Kurven für das instabile Gebiet und ferner für die Arbeitsweise als Generator auftragen, der der Kreisbogen unterhalb der Abszissenachse entspricht.

Das Kreisdiagramm des Induktionsmotors wurde zuerst von Heyland (ETZ 1894) in vereinfachter Form, das hier abgeleitete exakte Diagramm von Ossanna (Zeitschrift für

2. Der Resonanztransformator¹⁾.

Ein Resonanztransformator ist ein Transformator, an dessen sekundäre Wicklung Kondensatoren angeschlossen sind. Er wird in der Funkentelegraphie zur Transformierung von Wechselströmen in solche von hoher Spannung verwendet.

Die Kondensatoren sind an einen Schwingungskreis angeschlossen, der eine Funkenstrecke enthält; sobald die Kondensatorspannung die Funkenstrecke überschlägt, entladet sich der Kondensator in den Schwingungskreis mit einer Frequenz, die von den Konstanten des Kreises abhängt. Beim Überschlagen der Funkenstrecke ist der Kondensator fast kurzgeschlossen, und die sekundäre Klemmenspannung des Transformators geht auf einen kleinen Wert zurück. Sobald der Funke erlischt, steigt sie wieder auf den früheren Wert, die Resonanzspannung. Diese kann durch passende Wahl der Verhältnisse ein Vielfaches der Leerlaufspannung des Transformators sein, und es wird durch die besondere Art der Erzeugung dieser hohen Spannung bezweckt, daß beim Überschlag des Funkens die Lichtbogenbildung an der Funkenstrecke vermieden wird.

An Hand des Diagramms seien die Strom- und Spannungsverhältnisse des Transformators erörtert, wenn die sekundär angeschlossene Kapazität alle möglichen Werte von 0 bis ∞ annimmt.

¹⁾ s. Seibt, ETZ 1904, S. 276; Benischke, ETZ 1907, S. 25; Béthenod, Jahrb. f. drahtl. Telegraphie u. Telephonie 1907, S. 534.

Leerlaufstrom und Kurzschlußstrom sind gegeben, C sei die variable Kapazität, dann ist an den sekundären Klemmen

$$P_2 = \frac{J_2}{\omega C} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = -90^\circ.$$

Für Kapazität wird im Diagramm

$$\sphericalangle \alpha = \varphi_k - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k = \varphi_k + \frac{\pi}{2} + \gamma_0 - \gamma_k.$$

Da wir den Transformator als symmetrischen Stromkreis betrachten können, ist $\gamma_k = \gamma_0$,

$$\alpha = \varphi_k + \frac{\pi}{2}$$

und $\sphericalangle P_k P_0 M = \frac{\pi}{2} - \alpha = -\varphi_k$, s. Fig. 185. Das negative Vorzeichen sagt, daß dieser Winkel von $P_0 P_k$ nach oben aufzutragen ist. Da

$$PP_k = \frac{P_2}{C_k z_k} = \frac{J_2}{\omega C C_k z_k} \quad \text{und} \quad P_0 P = \frac{J_2}{C_0}$$

ist, wird für $C_0 = C_k$

$$PP_k : P_0 P = \frac{1}{\omega C} : z_k.$$

Noch einfacher stellt sich die Kapazität C dar, wenn man durch P_0 die Gerade $P_0 C$ senkrecht zum Radius $P_k M$ zieht. Die Gerade PP_k schneidet auf $P_0 C$ eine Strecke $P_0 B$ ab, für die infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke $P_0 P P_k$ und $B P_0 P_k$ gilt $P_0 B : P_0 P_k = P_0 P : P_k P$

$$= z_k : \frac{1}{\omega C} = \omega C : \frac{1}{z_k}.$$

$P_0 B$ ist also ωC im gleichem Maßstab, in dem $P_0 P_k$ den Leitwert $\frac{1}{z_k}$ darstellt.

Wächst C von Null

anfangend, so nimmt der primäre Strom erst ab und ist am kleinsten, wenn er in die Richtung OM fällt; er wächst dann, kommt in Phasengleichheit mit der Klemmenspannung und dann in Voreilung. Die sekundäre Spannung PP_k wächst mit steigender

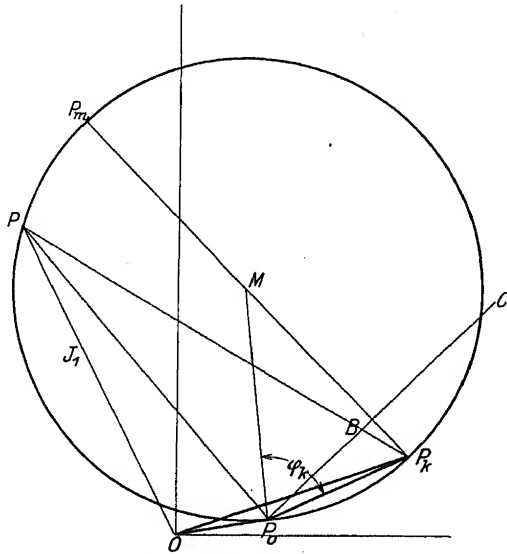


Fig. 185.

Kapazitätsbelastung von der Leerlaufspannung $P_k P_0$ anfangend und erreicht ihren größten Wert in P_m , wenn $P_m P_k$ der Kreisdurchmesser ist. Hier besteht Resonanz. Die Leerlaufspannung ist

$$P_{20} = \frac{P_1}{C_0}, \quad \text{und} \quad P_m P_k = \frac{P_0 P_k}{\cos \varphi_k}$$

$$P_{2 \max} = \frac{P_{20}}{\cos \varphi_k}.$$

Je kleiner $\cos \varphi_k$, um so größer wird das Verhältnis der maximalen Spannung zur Leerlaufspannung; hierzu müssen die Widerstände des Transformators möglichst klein sein. Für den widerstandsfreien Transformator wäre die Erhöhung der Spannung wie beim einfachen Resonanzstromkreis unendlich groß. Für P_m ist

$$\frac{P_m P_k}{P_0 P_m} = \frac{1}{\sin \varphi_k},$$

daher die Kapazität für die größte Spannung

$$C_{(P_{2 \max})} = \frac{\sin \varphi_k}{\omega z_k},$$

sie wird um so kleiner, je größer der Scheinwiderstand bei Kurzschluß ist. Da die Widerstände möglichst klein sein sollen, muß die Streuung groß sein.

Der sekundäre Strom bei Resonanz $P_0 P_m$ ist wesentlich größer als der bei Kurzschluß $P_0 P_k$; es ist

$$J_{2(P_{2 \max})} = \frac{J_{2k}}{\operatorname{tg} \varphi_k}.$$

Durch die große Streuung und den kleinen Kurzschlußstrom wird erreicht, daß bei überbrückter Funkenstrecke kein starker Strom aus dem Transformator nachfließen kann.

Der größte Sekundärstrom ergibt sich, wenn P auf dem Durchmesser durch P_0 liegt; die größte Ladeenergie des Kondensators, die proportional

dem Produkt $J_2 P_2$, also der Höhe des Dreiecks $P_0 P P_k$ ist, wenn P senkrecht über der Mitte von $P_0 P_k$ liegt. Hierbei ist $\frac{1}{\omega C} = z_k$.

In Fig. 186 ist das Verhältnis der sekundären Spannung P_2 zur Leerlaufspannung P_{20} als Funktion von $\frac{1}{\omega C} : z_k$ aufgetragen.

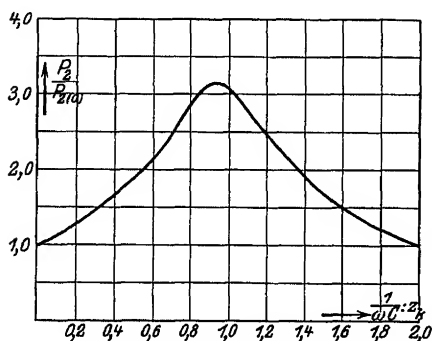


Fig. 186.

81. Vektorgleichung und geometrischer Ort.

Als geometrische Örter für Ströme und Spannungen bei Veränderung der Bedingungen des Stromkreises hatten wir in den einfachen Beispielen (s. S. 34, 325) Gerade und Kreise gefunden. Bei komplizierteren Schaltungen, wie sie z. B. durch Maschinen dargestellt werden, erhält man auch Ortskurven höherer Ordnung. Ohne auf die Theorie der Maschinen hier einzugehen, soll gezeigt werden, wie aus den Gleichungen eines Systems auf die Ortskurve geschlossen werden kann¹⁾.

Für konstante Koeffizienten L, M, R usw. sind die Grundgleichungen eines Problems, die aus den beiden Kirchhoffschen Regeln hervorgehen, stets lineare algebraische Bedingungsgleichungen zwischen den durch Zeitvektoren dargestellten Wechselstromgrößen. Jeder Vektor eines Stromes, einer Spannung usw., der kurz mit \mathfrak{Z} bezeichnet sei, läßt sich daher darstellen durch einen als konstant zu betrachtenden Ausgangsvektor \mathfrak{U} und einen Proportionalitätsfaktor \mathfrak{R} , der im allgemeinen eine komplexe Zahl ist.

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{R}$$

Ändert sich nun irgendeine Größe der Bedingungsgleichungen, indem man einen sie messenden Parameter v verschiedene Werte durchlaufen läßt, so erscheint der komplexe Faktor \mathfrak{R} als Funktion des Parameters und der Vektor \mathfrak{Z} wird in der geometrischen Darstellung irgendeine Kurve beschreiben. Ist, wie unter der gemachten Voraussetzung zutrifft, die zu messende Größe eine rationale Funktion des Parameters, so wird auch der gesuchte Vektor \mathfrak{Z} eine rationale, im allgemeinen gebrochene Funktion des Parameters sein. Sind daher $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ usw. konstante, komplexe Zahlen, v ein beliebiger reeller Parameter, so führt die Gleichung des Systems stets auf die allgemeine Form

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}v^2 + \dots + \mathfrak{M}v^m}{\mathfrak{D} + \mathfrak{E}v + \mathfrak{F}v^2 + \dots + \mathfrak{N}v^n} \dots \quad (314)$$

Diese Gleichung stellt je nach den Potenzen von v eine Kurve bestimmter Ordnung dar. Jede Zahl $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ im Zähler und Nenner hat einen reellen und einen imaginären Teil, die graphisch durch die Koordinaten eines Vektors vom Anfangspunkt dargestellt werden. Setzt man abgekürzt die Zähler und Nennersummen $\mathfrak{P}(v^m)$ und $\mathfrak{Q}(v^n)$, so können \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} in den reellen und den imaginären Teil zerlegt werden und es wird

$$\mathfrak{Z} = \frac{P_1(v^m) + j P_2(v^m)}{Q_1(v^n) + j Q_2(v^n)}.$$

¹⁾ s. O. Bloch, die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, Zürich 1917 und W. Michael, Diss., Zürich 1919.

Macht man den Nenner reell, so erhält man

$$\mathfrak{Z} = \frac{(P_1 Q_1 + P_2 Q_2)(v^{m+n}) + j(P_2 Q_1 - P_1 Q_2)(v^{m+n})}{Q_1^2 (v^{2n}) + Q_2^2 (v^{2n})} = \Phi(v) + j\Psi(v).$$

Φ und Ψ stellen Abszisse und Ordinate der Ortskurve des Vektors \mathfrak{Z} dar, und sind rationale gebrochene Funktionen von v .

Der Grad der Funktionen bestimmt die Ordnung der Kurve, sie ist $(m+n)$ wenn $m \geq n$ ist, und $2n$, wenn $m < n$ ist.

Sonderfall. Es sei der Nenner in (314) reell, wobei entweder die $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \dots$ reell sind oder gleiches Argument φ haben. Im letzten Fall kann man sie durch ihre Beträge D, E, F, \dots ersetzen und den gemeinsamen Faktor $e^{j\varphi}$ fortlassen, entsprechend einer Drehung der Kurve um φ , wobei ihr Charakter sich nicht ändert.

Die Form mit reellem Nenner

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{X} + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}v^2 + \dots + \mathfrak{M}v^m}{D + Ev + Fv^2 + \dots + Nv^n} \quad (315)$$

ist nun vom Grade m oder n , je nachdem $m \geq n$ oder $m < n$ ist.

Da man den Nenner stets reell machen und Gl. 314 in die Form 315 überführen kann, so gilt allgemein: erscheint der Nenner in reeller Form, so gibt die größere der Zahlen m und n die Ordnung der Kurve an. Nun kann, wenn $m < n$ ist, die Gl. 315 stets so umgeformt werden, daß $m \geq n$ ist. Ist $m < n$, so heißt dies, daß für $v = \infty$, $\mathfrak{Z} = 0$ ist, die Kurve durch den Ursprung geht. Verschiebt man die Kurve um eine konstante Strecke \mathfrak{T} , was einer Addition eines konstanten Vektors \mathfrak{T} zu \mathfrak{Z} entspricht, und bringt die Summe $\mathfrak{Z} + \mathfrak{T}$ auf gleichen Nenner, so wird der Zähler mindestens vom Grad des Nenners. Hiermit kann man sagen: Eine Form m ten Grades mit reellem Nenner stellt eine Ortskurve m ter Ordnung dar.

Als Ortskurve erster Ordnung erscheint die Gerade. Stellt \mathfrak{B} einen Vektor dar, so sind $\mathfrak{B}v$, wenn v alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft, mit \mathfrak{B} gleichgerichtete Vektoren. Ihre Endpunkte liegen auf einer Geraden durch den Ursprung, deren Gleichung ist

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}v \quad (316)$$

Addiert man zu den Vektoren der Geraden einen konstanten Vektor \mathfrak{X} , der eine andere Richtung hat als \mathfrak{B} , so ergeben sich neue Vektoren, deren Endpunkte eine zur ersten parallele Gerade beschreiben, die nicht durch den Ursprung geht.

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + \mathfrak{B}v \quad (317)$$

ist die Gleichung der Geraden allgemeiner Lage.

Haben \mathfrak{X} und \mathfrak{B} gleiche Richtung, so ist ihr Verhältnis reell, es gibt somit einen Wert v_0 , für den die Beträge $A + Bv_0 = 0$ ergeben. Die Form $\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}(v - v_0)$ zeigt, daß diese Gerade eine andere Punktverteilung hat, aber auch durch den Nullpunkt geht.

Die Gleichung zweiter Ordnung mit reellem Nenner

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}v}{C + Dv + Ev^2} \cdot \cdot \cdot \cdot (321)$$

geht durch den Ursprung für $v = \infty$. Für $\mathfrak{B} = \infty$ erhält man zwei Werte des Parameters v , indem man den Nenner gleich Null setzt. Diese Werte $v_{1,2}$ sind, je nachdem $\sqrt{D^2 - 4CE} \geq 0$ ist, reell und verschieden, reell und gleich, oder konjugiert komplex.

Sind sie gleich, $v_1 = v_2 = w$, so erhält man durch Partialbruchzerlegung die Form

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{F}}{(v-w)^2} + \frac{\mathfrak{G}}{(v-w)} = \mathfrak{F}u^2 + \mathfrak{G}u,$$

wobei $u = 1:(v-w)$ gesetzt wurde. Nach (320) ist dies eine Parabel durch den Ursprung. Sind v_1 und v_2 reell und verschieden, so wird analog

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{F}}{(v-v_1)} + \frac{\mathfrak{G}}{(v-v_2)} = \mathfrak{F}u + \mathfrak{G}r.$$

Sie hat für zwei verschiedene Werte von v einen unendlich fernen Punkt und ist daher eine Hyperbel, deren einer Ast durch den Ursprung geht. Sind endlich v_1 und v_2 konjugiert komplex, so ergibt sich für keinen Wert von v mehr ein Punkt im Unendlichen, die Kurve ist eine Ellipse durch den Ursprung.

Gl. 321 ist somit die Gleichung eines Kegelschnitts durch den Ursprung. In allgemeiner Lage erhält man sie durch Verschieben um einen konstanten Vektor \mathfrak{A} . Auf gemeinsamen Nenner gebracht ist die Gleichung

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'v + \mathfrak{C}'v^2}{C + Dv + Ev^2} \cdot \cdot \cdot \cdot (322)$$

Die Inverse eines Kegelschnitts in bezug auf einen Punkt der Peripherie ist nach einem bekannten Satz¹⁾ eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung, deren Singulärpunkt im Inversionszentrum liegt. Ihre Gleichung ist der reziproke Wert des Ausdrucks (321). Addiert man wieder einen konstanten Vektor, so liegt der singuläre Punkt in beliebiger Lage. Die Gleichung der zirkulären Kurve dritter Ordnung ist in allgemeiner Lage

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'v + \mathfrak{C}'v^2}{\mathfrak{D}' + \mathfrak{E}'v} \cdot \cdot \cdot \cdot (323)$$

Diese Gleichung entsteht auch wie folgt. Addiert man zu einem Kreis durch den Ursprung eine Gerade, so ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}v + \frac{1}{\mathfrak{D} + \mathfrak{E}v} = \frac{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'v + \mathfrak{C}'v^2}{\mathfrak{D} + \mathfrak{E}v},$$

¹⁾ s. z. B. E. Beutel, Algebraische Kurven. Sammlung Götschen 436, S. 77.

wo

$$\mathfrak{U}' = (1 + \mathfrak{U} \mathfrak{D}), \quad \mathfrak{B}' = (\mathfrak{U} \mathfrak{E} + \mathfrak{B} \mathfrak{D}), \quad \mathfrak{E}' = (\mathfrak{B} \mathfrak{E})$$

gesetzt ist.

Dies ergibt eine Konstruktion der Kurve.

Für große Werte v verschwinden die Vektoren nach dem Kreis gegen die der Geraden, sie ist die Asymptote der Kurve. Ist der Zähler reell, so liegt, wie erwähnt, der singuläre Punkt im Ursprung. Die beiden Wurzeln $v_{1,2}$ für die $\mathfrak{B} = 0$ wird, bestimmen dann, je nachdem sie gleich, reell und verschieden oder konjugiert komplex sind, einen reellen Doppelpunkt oder einen Umkehrpunkt oder einen isolierten Doppelpunkt.

Die Inverse der Gl. 323 ergibt die bizirkulare Kurve vierter Ordnung durch den Ursprung.

Durch Verschieben in die allgemeine Lage wird ihre Form

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{U} + \mathfrak{B}v + \mathfrak{E}v^2}{\mathfrak{D} + \mathfrak{E}v + \mathfrak{F}v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (324)$$

Man kann nun durch sukzessive Addition einer Geraden und Inversion zu immer höheren Ordnungen gelangen, wodurch sich alle zirkularen Kurven in der Form 314 ergeben, während nicht zirkuläre Kurven (wie die Kegelschnitte) auch in der Form 315 enthalten sind.

Dreizehntes Kapitel.

Ausgleichsvorgänge in quasistationären Stromkreisen.

82. Ausgleichströme. — 83. Stromkreis mit konstantem Widerstand und konstanter Induktivität. — 84. Stromkreise mit Widerstand und veränderlicher Induktivität. — 85. Stromkreise mit Widerstand und Kapazität. — 86. Stromkreis mit Widerstand, Induktivität und Kapazität. — 83. Symbolische Darstellung von Ausgleichströmen. — 84. Zusammengesetzte Stromkreise. — 85. Stromkreise mit gegenseitiger Induktion. — 86. Ausschaltvorgänge.

82. Ausgleichströme.

Bisher wurden die Erscheinungen des stationären Wechselstromes besprochen, der sich unter Einwirkung einer gegebenen Spannung in einem Stromkreis einstellt. Er kann als die erzwungene Schwingung angesehen werden, weil er im Takt der durch die Spannung eingeprägten Schwingungszahl schwingt.

Ändern sich die Bedingungen des Stromkreises, sei es, daß die zugeführte Spannung oder die Konstanten bei Schaltvorgängen oder Belastungsänderungen sich ändern, so geht der Strom aus einem stationären Zustand in einen anderen über. Der neue Endzustand stellt sich nicht augenblicklich ein, weil die ihm entsprechenden Energien der magnetischen und elektrischen Felder nicht vorhanden sind, die Felder zunächst geladen werden. Dies erfordert eine gewisse Übergangszeit. Während dieser überlagert sich über den stationären Strom ein sog. Ausgleichstrom oder freier Strom, der für sich die Bedingungen des Stromkreises erfüllt und den stetigen Übergang von einem stationären Zustand zum anderen vermittelt. Wir untersuchen zunächst Stromkreise, bei denen Widerstand, Induktivität und Kapazität als konzentriert zu betrachten sind, d. h. relativ langsame Vorgänge, bei denen in jedem Teil des Stromkreises der Strom in jedem Augenblick den gleichen Wert hat und die wir als quasistationäre Stromkreise bezeichnen.

Die Untersuchung vereinfacht sich, wenn die Konstanten des

Stromkreises R, L, C während der Übergangszeit sich nicht ändern. Die Spannungsgleichung eines solchen Stromkreises ist von der Form

$$p = \varphi \left(i, \frac{di}{dt} \int i dt \right), \dots \dots \dots (325)$$

worin φ eine lineare Funktion ist, deren Glieder teils den Strom i selbst in Verbindung mit Konstanten, teils den Differentialquotienten des Stromes nach der Zeit, teils das Zeitintegral des Stromes enthalten.

Während der Übergangszeit setzt sich der Strom zusammen aus dem (erzwungenen) stationären Strom i_e und dem (freien) Ausgleichstrom i_f , es ist

$$i = i_e + i_f \dots \dots \dots (326)$$

und da Gl. 325 linear ist, kann sie zerlegt werden in

$$p = \varphi \left(i_e, \frac{di_e}{dt}, \int i_e dt \right) + \varphi \left(i_f, \frac{di_f}{dt}, \int i_f dt \right), \dots (325a)$$

worin p die dem stationären Endzustand entsprechende Spannung ist. Nun erfüllt der stationäre Strom für sich die Bedingung

$$p = \varphi \left(i_e, \frac{di_e}{dt}, \int i_e dt \right), \dots \dots \dots (325b)$$

daher ist für den Ausgleichstrom

$$\varphi \left(i_f, \frac{di_f}{dt}, \int i_f dt \right) = 0 \dots \dots \dots (325c)$$

Man erhält die Gleichung des Ausgleichstromes für sich, wenn man in der Differentialgleichung die zugeführte Spannung gleich Null setzt. Sein Verlauf ist von der Art der zugeführten Spannung unabhängig, daher bezeichnet man ihn als freien Strom.

Der Ausgleichstrom vermittelt den stetigen Übergang vom Anfangszustand zum Endzustand. Bei Beginn der Zustandsänderung, den wir hier als Anfang der Zeitrechnung, $t=0$, ansehen, habe der Strom i einen Anfangswert $i_{a(0)}$. Bezeichnen $i_{e(0)}$ und $i_{f(0)}$ die Werte des erzwungenen stationären Stromes und des freien Stromes für den Augenblick $t=0$, so ist nach Gl. 326

$$i_{a(0)} = i_{e(0)} + i_{f(0)} \dots \dots \dots (327)$$

83. Stromkreis mit konstantem Widerstand und konstanter Induktivität.

Für einen solchen Stromkreis gilt nach Kap. II Gl. 21

$$p = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Setzen wir hierin nach Gl. 326 $i = i_e + i_f$, so wissen wir, daß

für den stationären Strom die Spannungsgleichung für sich erfüllt ist. Für den freien Strom gilt daher

$$R i_f + L \frac{d i_f}{d t} = 0 \quad (328)$$

Durch Trennung der Variablen wird

$$\frac{d i_f}{i_f} = - \frac{R}{L} d t.$$

Integriert man diese Gleichung von den Anfangswerten $t = 0$, $i_f = i_{f(0)}$, bis zu t bzw. i_f , so wird

$$\ln \left(\frac{i_f}{i_{f(0)}} \right) = - \frac{R}{L} t, \\ i_f = i_{f(0)} e^{-\frac{R}{L} t} \quad (329)$$

Dies ist die Helmholtzsche Gleichung des freien Stromes, die aussagt, daß er von seinem Anfangswert $i_{f(0)}$ an mit der Zeit nach der Exponentialfunktion $e^{-\frac{R}{L} t}$ ausklingt. Die Größe $\frac{R}{L}$ heißt Dämpfungsfaktor, er ist der reziproke Wert einer Zeit. Für einen Zeitpunkt $t = \frac{L}{R}$ nach Beginn des Ausgleichsvorganges ist

$$i_{(f)} = i_{f(0)} e^{-1} = \frac{1}{2,718} i_{f(0)},$$

der Strom ist auf den $\frac{1}{e}$ ten Teil seines Anfangswertes gesunken.

$\frac{L}{R}$ heißt die Zeitkonstante.

Nach Gl. 329 müßte der freie Strom erst nach unendlich langer Zeit verschwinden; praktisch klingen die meisten Ausgleichsvorgänge in kurzer Zeit ab.

Der Strom hat nur noch $\frac{1}{100}$ seines Anfangswertes, wenn

$$e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{1}{100}$$

ist, oder wenn

$$t = \frac{L}{R} \ln 100 = 4,605 \frac{L}{R}.$$

Ist z. B. $R = 1$ Ohm, $L = 0,1$ Henry, so ist die Zeitkonstante $\frac{L}{R} = 0,1$ Sekunden, der Ausgleichstrom ist nach 0,46 Sekunden auf den 100. Teil seines Anfangswertes gesunken.

Der Anfangswert $i_{f(0)}$ ist nun entsprechend Gl. 327 aus den besonderen Bedingungen zu ermitteln, die sich aus den stationären Anfangs- und Endzuständen ergeben, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

a) Der freie Strom beim Aufhören des Wirkens der Spannung.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn der Stromkreis nach Abstellung der Spannung in sich geschlossen bleibt, etwa bei der Magnetwicklung einer Maschine, die nach dem Abschalten in sich oder über einen Widerstand kurzgeschlossen wird. Der stationäre Strom ist hier wegen des Fehlens der Spannung $i_e = 0$. Der freie Strom ist daher für $t = 0$ nach Gl. 327

$$i_{f(0)} = i_a$$

gleich dem Wert, den der Strom vor dem Kurzschließen des Stromkreises z. Z. $t = 0$ hatte. Der gesamte Strom ist also hier

$$i = i_a e^{-\frac{R}{L}t} \dots \dots \dots (330)$$

In dem magnetischen Felde war ursprünglich eine Energie $\frac{1}{2} i_a^2 L$ aufgespeichert. Die Abnahme der Energie ist $-L i di = i^2 R dt$, sie ist die in der Zeit dt erzeugte Stromwärme. Nach Ablauf des Vorganges ist die ganze ursprünglich vorhandene magnetische Energie in Stromwärme umgewandelt.

Beispiel. In einem 6 poligen Gleichstrommotor ist der Fluß eines Poles $\Phi = 0,07$ Voltsek., jeder Pol hat 1700 Windungen, der Erregerstrom ist 4 Amp., der Widerstand der Erregerwicklung $R = 100$ Ohm.

Die Induktivität wird

$$L = \frac{\Phi w}{i} = \frac{0,07 \cdot 6 \cdot 1700}{4} = 178,5 \text{ Henry.}$$

Wird dieser Stromkreis sich überlassen, so klingt der Strom nach der Gleichung ab

$$i = 4 e^{-0,561 t}.$$

Die Zeitkonstante ist 1,785 Sek.; nach dieser Zeit ist der Strom auf den Wert $\frac{4}{e} = 1,47$ Amp. gefallen und auf $\frac{1}{100}$ des Anfangswertes nach $4,605 \cdot 1,785 \approx 8,2$ Sekunden. Der Vorgang ist in Fig. 188 dargestellt.

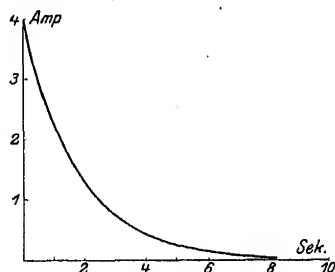


Fig. 188.

b) Entstehen eines Gleichstromes.

Wird der Stromkreis zur Zeit $t = 0$ an eine Gleichspannung P angeschlossen, so ist der erzwungene stationäre Strom $i_e = \frac{P}{R}$. Der Strom während der Übergangszeit ist

$$i = i_e + i_f = \frac{P}{R} + i_{f(0)} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Zur Ermittlung von $i_{f(0)}$ setzen wir die Grenzbedingung ein:

Zur Zeit $t=0$ ist $i=0$ und $i_{f(0)} = -\frac{P}{R}$, daher

$$i = \frac{P}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \dots \dots \dots (331)$$

Fig. 189 zeigt das Entstehen des Gleichstromes für das vorhergehende Beispiel. Er ist die Summe des stationären Stromes und des freien Stromes und steigt von dem Wert Null allmählich an.

c) Belastungsänderung in einem Gleichstromkreis.

Wird in einem Gleichstromkreis bei konstanter Spannung der Widerstand plötzlich von dem Wert R_a auf den Wert R_e geändert,

so ist der Anfangswert des Stromes $i_{a(0)} = \frac{P}{R_a}$, der stationäre End-

wert $i_{e(0)} = \frac{P}{R_e}$, aus Gl. 327 wird daher

$$i_{f(0)} = i_{a(0)} - i_{e(0)} = \frac{P}{R_a} - \frac{P}{R_e}$$

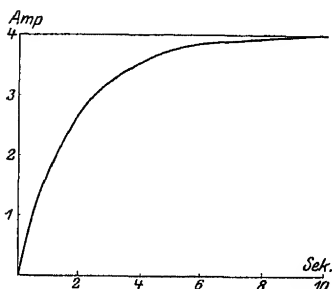


Fig. 189.

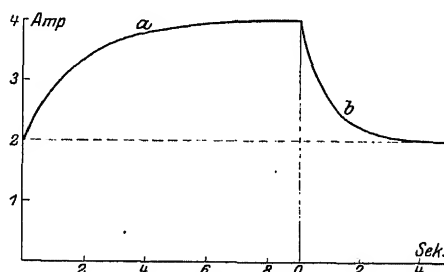


Fig. 190.

und der Strom während des Ausgleichsvorganges

$$i = i_e + i_{f(0)} e^{-\frac{R_e}{L}t} = \frac{P}{R_e} + \left[\frac{P}{R_a} - \frac{P}{R_e} \right] e^{-\frac{R_e}{L}t} \dots (332)$$

Fig. 190 zeigt für das Beispiel $L=178,5$ Henry den Stromverlauf a) wenn bei 400 Volt der Widerstand von $R_a=200$ auf $R_e=100$ verkleinert wird, b) wenn er von $R_a=100$ auf $R_e=200$ vergrößert wird. Im zweiten Fall ist der Dämpfungsfaktor doppelt so groß als im ersten, der Vorgang spielt sich viel schneller ab. Wir haben dieses Beispiel gewählt, weil es zeigt, daß bei einem Stromkreis mit sehr hoher Selbstinduktion, wie ihn die Magnetwicklung einer Dynamomaschine darstellt, der Ausgleichsvorgang mehrere Sekunden dauern kann. Streng genommen ist bei einer solchen Magnetwicklung L wegen der Eisensättigung keine Konstante. Wie hierbei zu rechnen ist, wird auf S. 259 gezeigt.

d) Das Einschalten eines Wechselstromes.

Wird der Stromkreis zur Zeit $t=0$ an eine Wechselspannung

$$p = p_m \sin(\omega t + \psi)$$

angeschlossen, so ist nach Kap. II S. 16 der stationäre Strom

$$i_e = i_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

worin
$$i_m = \frac{p_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

ist. Der freie Strom ist wieder $i_f = i_{f(0)} e^{-\frac{R}{L}t}$.

Da der Anfangsstrom $i_u = 0$ ist, wird nach Gl. 327

$$i_{f(0)} = -i_{e(0)} = -i_m \sin(\psi - \varphi)$$

und der gesamte Strom während des Einschaltvorganges:

$$i = i_e + i_f = i_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - i_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (333)$$

Die Größe des freien Stromes, der bei $t=0$ den stationären Strom zu Null ergänzt, hängt von dem Augenblick des Einschaltens ab. Wird in dem Augenblick eingeschaltet, in dem der stationäre Strom durch Null gehen würde, so ist auch $i_{f(0)} = 0$, und der Strom schwingt sich sofort auf den stationären einwelligen Strom ein. In jedem anderen Falle ist ein freier Strom vorhanden.

In Fig. 191 stellt die Sinuskurve i_e den stationären Strom dar, der beim Einschalten in dem auf der Zeitachse mit 0 bezeichneten Augenblick sofort entsteht, während bei den mit 1, 2, 3 bezeichneten Augenblicken, die nach der Exponentialkurve abklingenden Ausgleichsströme

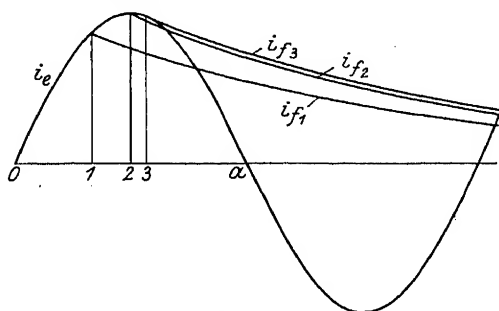


Fig. 191.

i_{f1} , i_{f2} , i_{f3} entstehen. Der

resultierende Strom ist nach Gl. 333 die Ordinatendifferenz zwischen der Sinuskurve und den Exponentialkurven. Er hat seinen größten Wert etwa $\frac{1}{4}$ Periode nach dem auf den Einschaltmoment folgenden ersten Nulldurchgang (α) des stationären Stromes, und zwar ergibt sich aus der Figur die größte Ordinatendifferenz für den Ausgleichstrom i_{f3} , der die Sinuskurve tangiert. Die Bedingung für den Einschaltmoment, bei dem der größte Einschaltstromstoß auftritt, ist daher, daß für $t=0$

$$\frac{di_e}{dt(t=0)} = \frac{di_f}{dt(t=0)}$$

Aus Gl. 333 erhält man

$$\omega \cos(\psi - \varphi) = -\frac{R}{L} \sin(\psi - \varphi)$$

und mit

$$\frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg} \varphi$$

$$\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi,$$

$$\psi = 0 \text{ oder } \pi,$$

dies ist der Augenblick, in dem die Spannung durch Null geht.

Für $\psi = 0$ ist der resultierende Strom

$$i_m \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi e^{-\frac{R}{L} t} \right].$$

Der Nulldurchgang des stationären Stromes nach dem Einschalten liegt bei $\omega t = \varphi$, das $\frac{1}{4}$ Periode später eintretende Maximum liegt

bei $\omega t = \varphi + \frac{\pi}{2}$ und wird

$$i_m \left[1 + \sin \varphi e^{-\frac{R}{\omega L} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)} \right] \dots \dots \dots (334)$$

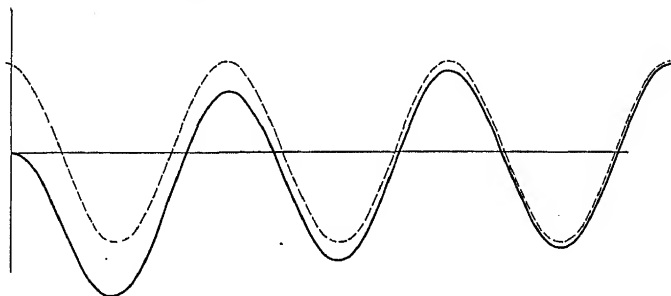


Fig. 192.

Ist R sehr klein gegen ωL , so nähert er sich dem Wert $2i_m$. Dies ist der größte Wert des Stromstoßes, der bei konstantem L beim Einschalten im Nulldurchgang der Spannung auftreten kann.

Fig. 192 stellt das Einschwingen des Stromes dar für $\cos \varphi = 0,18$ und beim Einschalten im Nulldurchgang der Spannung.

Bei einer plötzlichen Änderung einer der Konstanten R oder L des Stromkreises bei konstanter Spannung sind Anfangs- und Endwerte des Übergangsstromes

$$i_a = i_{am} \sin(\omega t + \varphi - \varphi_a), \quad i_e = i_{em} \sin(\omega t + \psi - \varphi_e),$$

der freie Strom im Augenblick $t = 0$ nach Gl. 327

$$i_f(0) = i_a(0) - i_e(0) = i_{am} \sin(\psi - \varphi_a) - i_{em} \sin(\psi - \varphi_e).$$

Er hängt nicht nur von der Größe, sondern auch von der Phasenverschiebung φ_a und φ_e der stationären Anfangs- und Endströme gegen die Spannung ab.

84. Stromkreise mit Widerstand und veränderlicher Induktivität.

Bei den eisenhaltigen Stromkreisen ist L in weiten Grenzen veränderlich, daher ist es nicht mehr möglich, den freien Strom von dem stationären rechnermäßig zu trennen. Hier ist die Differentialgleichung

$$p = Ri + w \frac{d\Phi}{dt}$$

zu verwenden, worin $\Phi = f(i)$ durch die Magnetisierungskurve gegeben ist.

Man kann mit Hilfe der Magnetisierungskurve den Vorgang angenähert graphisch verfolgen, wenn man statt der unendlich kleinen Änderung $d\Phi$ eine endliche $\Delta\Phi$ in der endlichen Zeit Δt betrachtet. Die Annäherung an den wirklichen Vorgang wird um so größer, je kleiner man die Größen wählt.

a) Das Einschalten eines Gleichstromes.

Hier ist $p = \text{konst.} = P$ und es wird

$$P = Ri + w \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Fig. 193 stellt die Magnetisierungskurve dar, die zweckmäßig so aufgetragen wird, daß die Ordinaten die Kraftlinienwindungen $w\Phi = \Psi$, die Abszissen den Ohmschen Spannungsabfall iR darstellen. Dem stationären Strom J entspreche $JR = P = OA$ und $w\Phi = AB$.

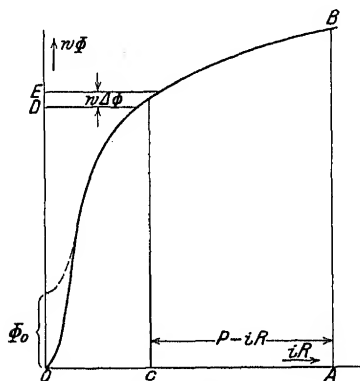


Fig. 193.

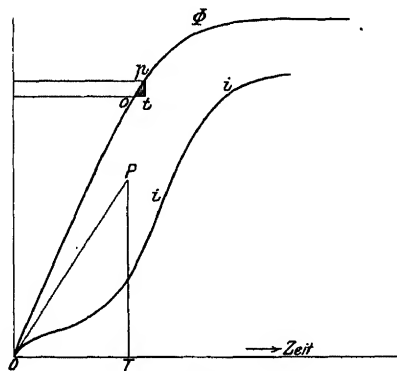


Fig. 194.

Greift man nun eine Flußänderung $w\Delta\Phi = DE$ heraus, bei der der Ohmsche Spannungsabfall im Mittel $iR = OC$ ist, so berechnet sich die zu dieser Flußänderung erforderliche Zeit beim Einschalten

$$\Delta t = \frac{w\Delta\Phi}{P - iR} \text{ Sek.}$$

Durch Einteilung der ganzen Flußänderung von 0 bis $w\Phi = AB$ in entsprechende Elemente $w\Delta\Phi$, die nicht gleichgroß zu sein brauchen, berechnen sich die zugehörigen Zeiten Δt und der ganze Einschaltvorgang. Graphisch verfährt man wie folgt:

In Fig. 193 seien die Maßstäbe der Flußwindungen und Spannungen

$$\begin{aligned} 1 \text{ cm} &= m \text{ Voltsek.}, & 1 \text{ cm} &= n \text{ Volt}, \\ \text{so ist} & w\Delta\Phi = m DE, & P - IR &= n CA \\ \text{und} & \Delta t = \frac{w\Delta\Phi}{P - IR} = \frac{m}{n} \frac{DE}{CA} \text{ Sek.} \end{aligned}$$

Macht man in Fig. 194 $OT = \frac{m}{n}$ Sek., $TP = CA$ und das Dreieck otp mit der Höhe $tp = DE$ ähnlich dem Dreieck OTP , indem man op parallel OP zieht, so ist $ot = \Delta t$ Sek.

Hierdurch erhält man das Ansteigen des Flusses mit der Zeit als eine gebrochene Kurve, die sich der wirklichen um so mehr anschmiegt, je kleiner die Elemente $\Delta\Phi$ gewählt werden. Aus der Magnetisierungskurve erhält man zu jedem Fluß den Strom und hiermit den zeitlichen Verlauf des Stromes i , der von dem des eisenlosen Stromkreises (Fig. 189) wesentlich abweicht.

Ist remanenter Magnetismus vorhanden, so beginnt die Zunahme des Flusses nicht bei 0, sondern bei Φ_0 , die Magnetisierungskurve steigt, wie in Fig. 193 gestrichelt angedeutet, von Φ_0 an. Der Einschaltvorgang wird hierbei entsprechend abgekürzt.

b) Das Einschalten eines unbelasteten Transformators.

Für einen leerlaufenden Transformator oder eine Drosselspule mit Eisen ist

$$Ri + w \frac{d\Phi}{dt} = p_m \sin(\omega t + \psi).$$

Der Transformator werde zur Zeit $t=0$ an das Netz angeschlossen, hier ist $i=0$, und $\Phi = \Phi_0$ sei der remanente Fluß. Durch Integration von 0 bis t wird

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{p_m}{\omega w} \cos(\omega t + \psi) + \frac{p_m}{\omega w} \cos \psi - \int_0^t \frac{Rid\tau}{w}. \quad (335)$$

Auf der rechten Seite haben wir vier Glieder, das erste ist, wie erwähnt, von der Remanenz bedingt und konstant. Das zweite Glied ist ein Wechselfluß mit der Amplitude

$$\Phi'_m = \frac{p_m}{\omega w}.$$

Dies ist jener stationäre Fluß, der sich einstellen würde, wenn der Ohmsche Spannungsabfall in der Wicklung Null wäre.

Bei modernen Transformatoren hat der Vollaststrom etwa 1% Ohmschen Spannungsabfall, und der Leerlaufstrom beträgt durchschnittlich 10% vom Vollaststrom. Daher ist sein Spannungsabfall nur etwa 0,1% der Klemmenspannung, und dabei ist Φ'_m sehr nahe gleich dem Fluß bei Leerlauf. Das dritte Glied ist konstant $\Phi'_m \cos \psi$ und ergänzt den stationären Fluß im Augenblick $t=0$ zu Null. Das vierte Glied endlich stellt die durch den Ohmschen Spannungsabfall bedingte Abnahme des Flusses dar.

Mit großer Annäherung, d. h. bei Vernachlässigung des Ohmschen Spannungsabfalls des stationären Magnetisierungsstromes stellen also die vier Glieder der Gl. 335 dar: das zweite den stationären Fluß, das erste und dritte zusammen den Anfangswert des freien Flusses, das vierte die Dämpfung des freien Flusses.

Nun ist bei einer Wechselspannung der Zusammenhang zwischen Strom und Fluß durch die Hysteresisschleife gegeben.

Beim Einschalten schwingt Φ nicht um den Wert Null, sondern um einen Fluß, der seine Richtung beibehält, er ist zu Anfang $\Phi_0 + \Phi'_m \cos \psi$ und klingt

mit der Zeit ab, so daß nicht die symmetrische Hysteresisschleife beschrieben wird, sondern Schleifen, die, wie Fig. 195 zeigt, unsymmetrisch zum Koordinatenanfangspunkt liegen¹⁾, und deren Lage von dem Anfangswert abhängt. Da wir über diese Art der Hysteresisschleifen nichts Näheres kennen, entzieht sich der Vorgang einer rechnerischen Untersuchung. Sieht man von der Dämpfung in den ersten beiden Halbperioden ab, so ergibt sich im ungünstigsten Falle der Fluß und der Stromstoß wie folgt.

Der Teil $\Phi'_m \cos \psi$ hat seinen größten Wert, wenn $\psi=0$ ist, d. h. wenn im Nulldurchgang der Spannung eingeschaltet wird. Ihm kann der remanente Fluß gleich- oder entgegengerichtet sein, so daß im ungünstigsten Falle der Anfangswert des freien Flusses $\Phi_0 + \Phi'_m$ ist.

Der stationäre Fluß beginnt für $\psi=0$ mit $-\Phi'_m$ und ist nach $\frac{1}{2}$ Periode $+\Phi'_m$ geworden, so daß bei kleiner Dämpfung der Fluß

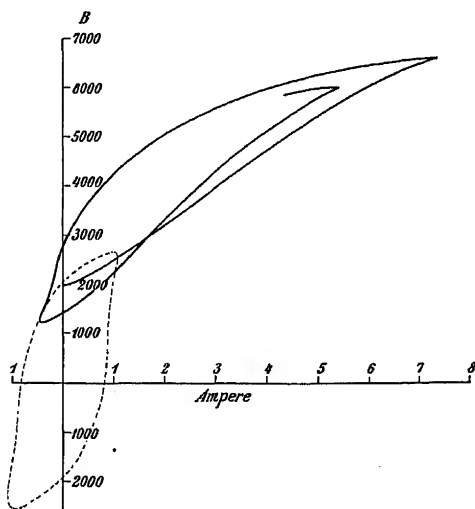


Fig. 195.

¹⁾ s. Hay, Electrician 1894.

nach $\frac{1}{2}$ Periode $\Phi_0 + 2\Phi'_m$ ist, also mehr als doppelt so groß wie die Amplitude des stationären Flusses, um so mehr, je größer die Remanenz ist. Die Induktion steigt nicht ganz proportional, weil bei den hohen Sättigungen ein größerer Teil des Flusses durch die Luft verläuft; immerhin kann bei modernen Transformatoren, bei denen die Amplitude der Induktion im stationären Zustand etwa $B_{max} = 14000$ ist, die Sättigung auf $B = 30000$ steigen, und hierzu

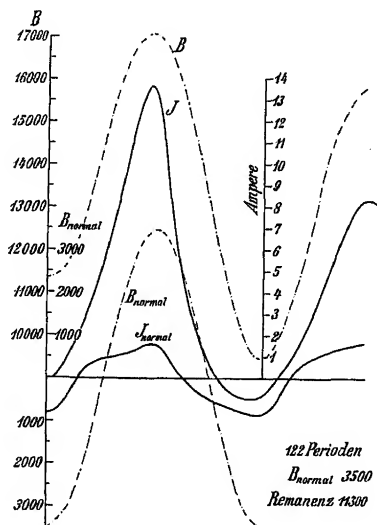


Fig. 196.

gehört ein Strom, der ein Vielfaches nicht nur des stationären Magnetisierungsstromes, sondern auch des Vollaststromes ist, er bedingt einen großen Spannungsabfall, so daß die folgende Welle schon abgeschwächt ist.

Fig. 196 zeigt nach A. Hay (El. review 1898) die mittels Joubertscher Scheibe aufgenommenen Anfangsschwingungen des Stromes und der Induktion, und Fig. 197 zeigt nach Linke (Arch. f. Elektr., Bd. I, S. 21) das Oszillogramm des Einschwingens des Stromes an einem modernen Transformator. Zur Vermeidung der Stromstöße, die nicht nur für die Schalter und Meßinstrumente schädlich sind,

sondern auch die Wicklung mechanisch stark beanspruchen, ver-

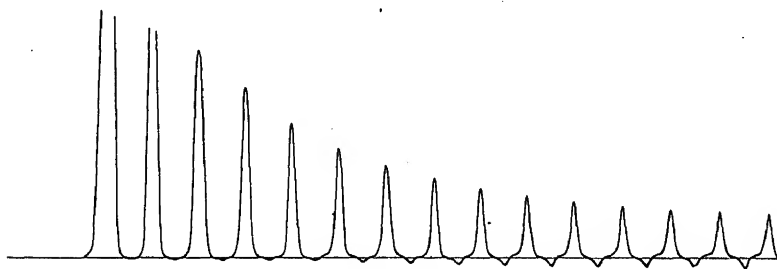


Fig. 197.

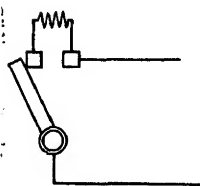


Fig. 198.

wendet man einen Schalter mit Widerstandsvorstufe (Fig. 198). Da der Vorgang in wenigen Perioden abklingt, braucht man praktisch nicht auf der Vorstufe stehenzubleiben, da die erforderliche Zeit nicht größer ist als der Schalterbewegung entspricht. Der Widerstand muß so bemessen sein, daß einerseits beim Einschalten, anderer-

seits beim Kurzschließen des Widerstandes der Stromstoß ein zulässiges Maß nicht überschreitet.

Eine angenäherte Berechnung hat Rogowski¹⁾ unter Vernachlässigung der Hysteresis und der vergrößerten Streuung durchgeführt, indem er die Magnetisierungskurve in drei Teile zerlegt und durch gerade Linien ersetzt. Danach genügt ein Widerstand, der etwa (5 bis) 10⁰/₀ der vollen Klemmenspannung beim stationären Magnetisierungsstrom aufnimmt.

85. Stromkreise mit Widerstand und Kapazität.

In einem Stromkreis, in dem ein Widerstand R in Reihe mit einem Kondensator C liegt, ist nach Kap. II Gl. 36

$$p = Ri + \int \frac{idt}{C}.$$

In der Übergangszeit setzt sich i aus dem erzwungenen Strom i_e und dem freien Strom i_f zusammen, es ist $i = i_e + i_f$.

Der stationäre Strom erfüllt für sich die Spannungsgleichung, daher ist für den freien Strom

$$Ri_f + \int i_f \frac{dt}{C} = 0 \quad \dots \quad (336)$$

Durch Differentiation und Trennung der Variabeln wird

$$\frac{di_f}{i_f} = - \frac{dt}{RC}$$

und durch Integration von $i_f = i_{f(0)}$ und $t = 0$ bis i_f und t wird

$$\ln \left(\frac{i_f}{i_{f(0)}} \right) = - \frac{t}{RC},$$

$$i_f = i_{f(0)} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \dots \quad (337)$$

Der Dämpfungsfaktor ist hier $\frac{1}{RC}$, die Zeitkonstante RC .

Für die Ladung q des Kondensators ist ganz analog

$$p = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C},$$

für die freie Ladung

$$R \frac{dq_f}{dt} + \frac{q_f}{C} = 0,$$

$$q_f = q_{f(0)} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \dots \quad (338)$$

¹⁾ Arch. f. Elektr., Bd. I, S. 344.

und für die Kondensatorspannung

$$p_{fc} = \frac{q_f}{C} = p_{f(0)} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

a) Entladung eines Kondensators über einen Widerstand.

Der Kondensator ist auf eine Spannung P_c geladen und besitzt daher die Anfangsladung $q_a = P_c C$. Er wird zur Zeit $t=0$ über einen Widerstand geschlossen und entladet sich; der Endzustand ist $q_e = 0$, und

$$\begin{aligned} q_{f(0)} &= q_{a(0)} - q_{e(0)} = q_a = P_c C, \\ q &= q_f + q_e = q_f = q_a e^{-\frac{t}{RC}} = P_c C e^{-\frac{t}{RC}} \quad \dots (339) \end{aligned}$$

Der Entladestrom ist

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q_a e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{P_c}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \dots (340)$$

Der Anfangswert des Stromes ist $\frac{P_c}{R}$. Der Kondensator hatte zu Anfang die Energie $\frac{1}{2} P_c^2 C$, diese ist während der Entladung in Stromwärme übergegangen, denn es ist

$$\int_{t=0}^{t=\infty} i^2 R dt = \int_{t=0}^{t=\infty} \frac{P_c^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} R dt = \frac{1}{2} P_c^2 C.$$

b) Ladung eines Kondensators über einen Widerstand mit Gleichstrom.

Hier ist der Endzustand $q_e = P_c C$. War der Kondensator ungeladen, so ist $q_a = 0$, daher

$$\begin{aligned} q_{f(0)} &= q_{a(0)} - q_{e(0)} = -P_c C, \\ q &= q_f + q_e = P_c C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad \dots (341) \end{aligned}$$

Der Ladestrom ergibt sich wieder aus $i = \frac{dq}{dt}$

$$i = \frac{P_c}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \dots (342)$$

Er ist ebenso groß wie bei der Entladung, nur von umgekehrtem Vorzeichen. Daher wird auch während der Ladung in dem Widerstand dieselbe Stromwärme erzeugt wie bei der Entladung; sie war $\frac{1}{2} P_c^2 C$, und da bei der Ladung eine ebenso große Energie dem Kondensator zugeführt wird, wird während der Ladung dem Stromkreis das Doppelte der Energie zugeführt, die nachher im Kondensator aufgespeichert ist, ganz unabhängig davon, wie groß der Widerstand ist.

Gl. 342 folgt, daß der Strom im Augenblick des Einschaltens $i = \frac{P_c}{R}$ ist, also sehr groß werden kann, wenn R klein ist.

Im Fall, wenn ein unbelastetes Kabel an die Spannung angeschlossen wird. Der Stromstoß wird, wie später gezeigt wird, durch die Induktivität des Leiters gedämpft, bei konzentrischen Kabeln ist diese aber sehr klein, so daß für diesen Fall das Kabel induktionsfrei betrachtet werden kann. Für ein kurzes Kabel kann man sich in erster Annäherung die Kapazität in der Leitung zwischen Hin- und Rückleitung konzentriert vorstellen, es ist ihm dann der halbe Widerstand der Leitung vorzusetzen.

Ein konzentrisches Kabel von 60 qmm Querschnitt, das normal verlegt wird, habe eine Kapazität von $0,5 \cdot 10^{-6}$ F/km. Der Widerstand beider Leiter ist für 1 km 0,585 Ohm.

Ein Kabelstück von 2 km hat also eine Kapazität von 1 Mikrofaraad, was man in der Mitte, also hinter einem Widerstand von 0,585 Ohm vorstellen kann. Würde das Kabel direkt an die Netzspannung angeschlossen, so wäre der Stromstoß beim Einschalten

unter Vernachlässigung der Induktivität $\frac{600}{0,585} = 1025$ Amp., also fast so groß wie der Betriebsstrom. Der Strom klingt nachfolgendermaßen ab:

$$i = \frac{P_c}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = 1025 e^{-\frac{10^6 t}{0,585}}$$

er ist auf 1% des Anfangswertes gefallen, wenn

$$t = RC \ln 100 = 4,6 \cdot 0,585 \cdot 10^{-6} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ Sek.}$$

Der Ausgleichsvorgang spielt sich also in außerordentlich kurzer Zeit ab, weil die Dämpfung sehr groß ist. Die Ladung ist

$$q = CP_c = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Coulomb.}$$

Es folgt hieraus, daß es zweckmäßig ist, ein Kabel nicht direkt, sondern über einen besonderen Vorschaltwiderstand anzuschließen, besonders wenn es sich um Hochspannungskabel handelt.

Ladung eines Kondensators über einen Widerstand mit Wechselstrom.

Sei der Stromkreis z. Z. $t=0$ an eine Wechselspannung angeschlossen.

$$p = p_m \sin(\omega t + \psi)$$

angenommen, so ist der stationäre Strom

$$i_e = i_m \sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

worin

$$i_m = \frac{p_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega CR}$$

ist. Die stationäre Ladung des Kondensators ist

$$q_e = \int i_e dt = q_m \sin\left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

worin

$$q_m = \frac{i_m}{\omega}$$

ist. Die freie Ladung und Kondensatorspannung sind

$$q_f = q_{f(0)} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad p_{fc} = p_{fc(0)} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

War der Kondensator ungeladen, d. h. $q_a = 0$, so ist

$$q_{f(0)} = -q_{e(0)} = -q_m \sin\left(\psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

und während des Einschaltvorganges

$$q = q_e + q_f = q_m \sin\left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - q_m \sin\left(\psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Der freie Strom ist

$$i_f = \frac{dq_f}{dt} = -\frac{q_m}{RC} \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (343)$$

oder da

$$q_m = \frac{i_m}{\omega}$$

$$i_f = -\frac{i_m}{\omega RC} \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}},$$

der gesamte Strom

$$i = i_e + i_f = i_m \sin(\omega t + \psi + \varphi) - \frac{i_m}{\omega CR} \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (344)$$

Er ist im Einschaltmoment ($t=0$)

$$i_{(0)} = i_m \left[\sin(\psi + \varphi) - \frac{\cos(\psi + \varphi)}{\omega RC} \right] = i_m \frac{\sin \psi}{\cos \varphi},$$

und wird dann am größten, wenn $\psi = 90^\circ$ ist, d. h. wenn in dem Augenblick eingeschaltet wird, in dem die Spannung ihre Amplitude erreicht. Der größte Wert des Stromes ist also $\frac{i_m}{\cos \varphi} = \frac{p_m}{R}$.

Da der freie Strom in dem Beispiel S. 265 in $2,7 \cdot 10^{-3}$ Sek. auf 1% seines Anfangswertes gesunken ist, also bei 50 Perioden in

dem $1,35 \cdot 10^{-4}$ ten Teil einer Periode, ist der stationäre Zustand sehr schnell hergestellt.

Dieses Beispiel stellt einen extremen Grenzfall dar, der noch dadurch zu berichtigen wäre, daß der Widerstand bei so schnellen Stromänderungen durch die Stromverdrängung (s. Kap. IX) wesentlich erhöht wird, und weil ferner die auch noch so kleine Induktivität dämpfend wirkt. Immerhin zeigt sich, daß beim Anschließen von Kabeln an das Netz große Stromstöße auftreten können und die Verwendung von Vorschaltwiderständen oder allmähliche Ladung durch stufenweise Erhöhung der Maschinenspannung nötig werden.

86. Stromkreis mit Widerstand, Induktivität und Kapazität in Reihenschaltung.

Für diesen Stromkreis ist nach Kap. II Gl. 36

$$p = Ri + L \frac{di}{dt} + \int \frac{i dt}{C}.$$

Während der Übergangszeit ist

$$i = i_e + i_f,$$

und da die Differentialgleichung von dem stationären Strom i_e für sich erfüllt wird, gilt für den freien Strom

$$R i_f + L \frac{di_f}{dt} + \int \frac{i_f dt}{C} = 0 \quad \dots \quad (345)$$

Durch Differentiation erhält man hieraus

$$\frac{d^2 i_f}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_f}{dt} + \frac{i_f}{LC} = 0 \quad \dots \quad (345a)$$

Setzt man in Gl. 345 $i_f = \frac{dq_f}{dt}$, so ergibt sich für die Ladung des Kondensators q_f die analoge Gleichung

$$\frac{d^2 q_f}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq_f}{dt} + \frac{q_f}{LC} = 0 \quad \dots \quad (346)$$

Der Verlauf von Strom und Ladung ist also von gleicher Art, sie unterscheiden sich nur durch Konstante.

Gl. 345a wird befriedigt durch den Ansatz

$$i_f = k e^{\gamma t}.$$

Setzt man diesen Wert und seine Ableitungen in Gl. 345a ein, so ist

$$\gamma^2 + \frac{R}{L} \gamma + \frac{1}{LC} = 0.$$

γ hat also die beiden Werte

$$\gamma_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (347)$$

Es ist hier zu unterscheiden, ob $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ist.

1. Ist $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, so sind γ_1 und γ_2 reell. Die vollständige Lösung des Integrals lautet

$$i_f = k_1 e^{\gamma_1 t} + k_2 e^{\gamma_2 t} \quad (348)$$

und die freie Ladung ist

$$q_f = \int i_f dt = \frac{k_1}{\gamma_1} e^{\gamma_1 t} + \frac{k_2}{\gamma_2} e^{\gamma_2 t} \quad (349)$$

k_1 und k_2 sind die aus den Anfangsbedingungen zu ermittelnden Konstanten.

i_f und q_f klingen nach zwei Exponentialfunktionen ab, bei denen ein Dämpfungsfaktor größer als $\frac{R}{2L}$, der andere kleiner ist.

2. Ist $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, so ist $\gamma_1 = \gamma_2 = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Für gleiche Wurzeln lautet die Lösung der Differentialgleichung (für q_f)

$$q_f = (k_1 + t k_2) e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} \quad (350)$$

und

$$i_f = \frac{dq_f}{dt} = \left[k_2 - \frac{1}{\sqrt{LC}} (k_1 + t k_2) \right] e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} \quad . . . (351)$$

3. Ist $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, so sind γ_1 und γ_2 imaginär. Setzt man

$$\frac{R}{2L} = \alpha, \quad \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \beta, \quad . . . (352)$$

so ist

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\gamma_1 = -(\alpha - j\beta), \quad \gamma_2 = -(\alpha + j\beta),$$

worin α und β reell sind. Daher wird

$$q_f = k_1 e^{-(\alpha - j\beta)t} + k_2 e^{-(\alpha + j\beta)t}.$$

Da

$$e^{\pm j\beta t} = \cos \beta t \pm j \sin \beta t,$$

wird

$$q_f = e^{-\alpha t} (a \cos \beta t + b \sin \beta t), \quad \dots \quad (353)$$

worin

$$a = k_1 + k_2, \quad b = j(k_1 - k_2)$$

reell sind, da der Vorgang reell ist.

Setzt man in Gl. 353

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

so wird auch

$$q_f = e^{-\alpha t} A \sin(\beta t + \delta). \quad \dots \quad (353a)$$

Der Strom wird

$$i_f = \frac{dq_f}{dt} = e^{-\alpha t} [-\alpha A \sin(\beta t + \delta) + \beta A \cos(\beta t + \delta)] \quad (354)$$

$$= e^{-\alpha t} A \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin\left(\beta t + \delta - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}\right). \quad \dots \quad (354a)$$

Hier verlaufen also Strom und Ladung nach Sinusschwingungen mit gedämpfter Amplitude. Der Dämpfungsfaktor ist $\alpha = \frac{R}{2L}$, die Kreisfrequenz ist

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}.$$

Sie heißt die Eigenfrequenz des Stromkreises. Bei sehr kleinem Widerstand ist sie angenähert gleich der Resonanzfrequenz ω_0 für den stationären Wechselstrom (s. S. 24). Die Konstanten A und δ sind aus den Anfangsbedingungen zu ermitteln. Da in der Gl. 354a

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \dots \quad (352a)$$

ist, und die Kondensatorspannung $\frac{q_f}{C}$ ist, sieht man, daß man die

Amplituden der Kondensatorspannung aus denen des Stromes erhält

durch Multiplikation mit $\sqrt{\frac{L}{C}}$. Diese Größe, die die Dimension

eines Widerstandes hat, wurde bei Leitungen mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität als Charakteristik bezeichnet. Hier kann sie analog als charakteristischer Widerstand des Stromkreises bezeichnet werden; ist er kleiner als der halbe Ohmsche Widerstand oder ihm gleich (Fall 1 und 2), so ist der Ausgleichsvorgang aperiodisch, andernfalls, wie wir sehen, oszillierend. Die Phasenverschiebung zwischen Strom- und Kondensatorspannung bei oszil-

lierendem Vorgang ist, wie aus Gl. 353a und 354a folgt, $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$.

Beispiele.

a) Entladung eines Kondensators.

Der auf die Spannung P_c geladene Kondensator wird z. Z. $t=0$ über den Widerstand R und die Induktivität L geschlossen und entladet sich. Wir haben also folgende Grenzbedingungen:

$$q_a = P_c C, \quad q_e = 0, \quad i_a = 0, \quad i_e = 0$$

und die Anfangswerte

$$\left. \begin{aligned} q_f(0) &= q_a(0) - q_e(0) = P_c C \\ i_f(0) &= i_a(0) - i_e(0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (355)$$

1. Für die aperiodische Entladung wird nach Gl. 348, mit 355 für $t=0$

$$k_1 + k_2 = i_f(0) = 0, \quad k_2 = -k_1$$

und nach Gl. 349

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{\gamma_1} + \frac{k_2}{\gamma_2} &= P_c C \\ k_1 = -k_2 &= \frac{P_c C \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{-P_c}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \end{aligned}$$

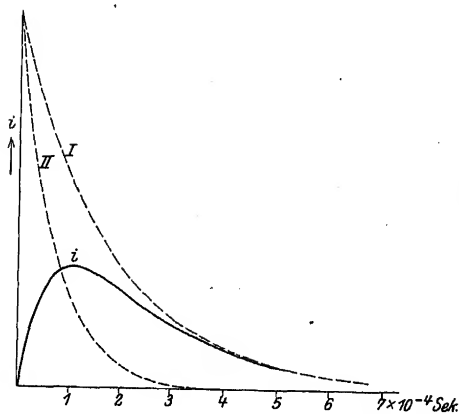


Fig. 199 a.

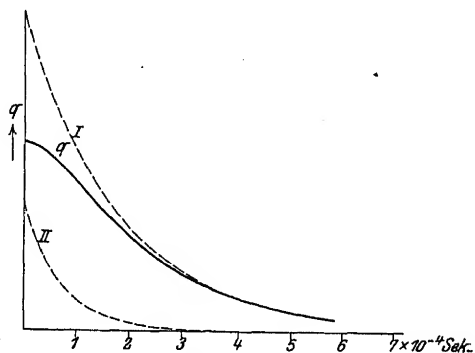


Fig. 199 b.

Hiermit erhält man

$$i = i_f = \frac{-P_c}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}) \dots \dots \dots (356)$$

$$\begin{aligned} q = q_f = \frac{P_c C}{2 \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \left[\left(R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}} \right) e^{\gamma_1 t} \right. \\ \left. - \left(R - \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}} \right) e^{\gamma_2 t} \right] \dots \dots (357) \end{aligned}$$

Fig. 199 a und b zeigen Entladestrom und Ladung für

$$C = 10^{-6} \text{ Fd.}, \quad R = 500 \text{ Ohm}, \quad L = 0,05 \text{ Henry}.$$

Beide sind die Differenz einer langsam (I) und einer schnell (II) abklingenden Funktion, beim Strom haben sie den gleichen Anfangswert, daher steigt er von Null an, um wieder zu fallen; bei der Ladung sind die Anfangswerte ungleich, ihre Differenz ist die Anfangsladung, sie nimmt erst langsam, dann schnell ab.

Der größte Strom, der bei Entladung über einen reinen Widerstand (s. S. 264) $\frac{P_c}{R}$ ist und sofort nach dem Schließen auftritt, wird hier durch die Induktivität verkleinert und verzögert. Es wird $\frac{di}{dt} = 0$, wenn (s. Gl. 356)

$$\gamma_1 e^{\gamma_1 t} = \gamma_2 e^{\gamma_2 t}$$

ist, oder

$$e^{(\gamma_1 - \gamma_2)t} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \\ t = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Hiermit ist

$$e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t} = e^{\gamma_1 t} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) = e^{\gamma_1 - \gamma_2} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \\ = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)$$

und in Gl. 356 eingesetzt

$$i_{max} = \frac{P_c}{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{R - \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \right)^{-\left(\frac{R}{2 \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} - \frac{1}{2} \right)} \quad (356a)$$

In dem Beispiel S. 265 wird $i_{max} = \frac{P_c}{660}$, während ohne Induktivität $i_{max} = \frac{P_c}{500}$, also 1,32 mal so groß, war.

2. Im Grenzfall $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ergibt Gl. 355 mit 350 und 351 für $t = 0$, $k_1 = q_{f(0)} = P_c C$, $k_2 = \frac{k_1}{\sqrt{LC}}$

$$q = q_f = P_c C \left(1 + \frac{t}{\sqrt{LC}} \right) e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} \quad (358)$$

$$i = i_f = -\frac{P_c}{L} t e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} \quad (359)$$

3. Bei oszillierender Entladung endlich, $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, erhält man in Gl. 353a und 354a für $t=0$

$$\begin{aligned} A \sin \delta &= q_{f(0)} = P_c C \\ -\alpha A \sin \delta + \beta A \cos \delta &= i_{f(0)} = 0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\delta = \arctg \frac{\beta}{\alpha}, \quad \sin \delta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \beta \sqrt{LC}$$

und

$$A = \frac{P_c C}{\sin \delta} = \frac{P_c}{\beta} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Hiermit werden Gl. 353a und 354a

$$q = q_f = e^{-\alpha t} \frac{P_c}{\beta} \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \left(\beta t + \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad \dots \quad (360)$$

$$i = i_f = e^{-\alpha t} \frac{P_c}{\beta L} \sin \beta t \quad \dots \quad (361)$$

Der größte Strom ergibt sich hier, wenn $\frac{d(e^{-\alpha t} \sin \beta t)}{dt} = 0$ ist,

also wenn $\tg \beta t = \frac{\beta}{\alpha}$ oder $t = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\beta}{\alpha} = \frac{T}{2\pi} \arctg \frac{\beta}{\alpha}$ ist, worin T die Periodendauer ist. Es wird

$$\sin \beta t = \sin \left(\arctg \frac{\beta}{\alpha} \right) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \beta \sqrt{LC}$$

und

$$i_{max} = P_c \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{R}{2L\beta} \arctg \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)} \quad \dots \quad (362)$$

Für einen widerstandsfreien Stromkreis wäre die Stromamplitude und ebenso die Ladungs- (bzw. Spannungs-) Amplitude ungedämpft

$i_{max} = P_c \sqrt{\frac{C}{L}}$, sie tritt, da für $R=0$, $\arctg \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$ ist, zuerst

$\frac{1}{4}$ Periode nach dem Beginn der Entladung auf. Die ursprünglich im Kondensator vorhandene Energie $\frac{1}{2} P_c^2 C$ entladet sich dann vollständig in das Feld der Induktivität und erscheint dort nach $\frac{1}{4}$ Periode als magnetische Energie $\frac{1}{2} i_{max}^2 L$. Jetzt kann der Strom nicht mehr steigen, und da die Kondensatorspannung Null geworden ist, entladet sich die Induktivität in den Kondensator usw.

Ist Widerstand vorhanden, so wird bei jeder Ladung ein Teil der Energie in Wärme umgesetzt, daher sind die Amplituden gedämpft, der Vorgang klingt ab, und die während des ganzen Vorgangs erzeugte Stromwärme ist gleich der ursprünglich im Kondensator aufgespeicherten Energie.

Fig. 200 zeigt den Stromverlauf für

$$C = 10^{-6} \text{ F.}, \quad L = 0,5 \text{ Henry}, \quad R = 100 \text{ Ohm.}$$

Die Periodenzahl ist

$$\frac{\beta}{2\pi} = 224$$

und der Strom hat die Gleichung

$$i = \frac{P_c}{700} e^{-100t} \sin 1400t.$$

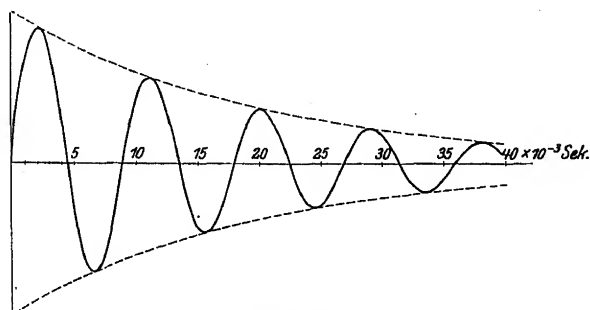


Fig. 200.

b) Ladung mit konstanter Spannung.

Bei der Ladung mit konstanter Spannung sind die Grenzbedingungen, wenn der Kondensator ungeladen war,

$$\begin{aligned} q_a &= 0, & q_e &= PC, & q_{f(0)} &= -q_{e(0)} = -PC, \\ i_a &= 0, & i_e &= 0, & i_{f(0)} &= 0, \\ q &= q_e + q_f & i &= i_f. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen unterscheiden sich von denen bei der Entladung nur dadurch, daß die freie Ladung zur Zeit $t=0$ das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie dort, und daraus ergibt sich als gesamte Ladung nun die Differenz aus der Ladung des Endzustandes und der freien Ladung, die genau denselben Verlauf hat wie bei der Entladung, während der Ladestrom ebenfalls den gleichen Verlauf hat wie zuvor, jedoch das entgegengesetzte Vorzeichen. Bei oszillierender Ladung haben die freie Ladung und die Kondensatorspannung nach $\frac{1}{2}$ Periode ihre größte Amplitude in entgegengesetztem Sinne wie zu Anfang und addieren sich zum stationären Wert. Da $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\beta}$, wird die maximale Kondensatorspannung

$$P_{c \max} = P \left(1 + e^{-\frac{\alpha \pi}{\beta}} \right),$$

d. h. bei kleinem Widerstand, doppelt so groß wie die stationäre Spannung.

Aus dem gleichen Verlauf des Ladestromes und des Entladestromes folgt wieder wie für den Stromkreis mit R und C , daß die gesamte Stromwärme während der Ladung ebenso groß ist wie bei der Entladung, nämlich gleich der im Endzustand im Kondensator aufgespeicherten Energie $\frac{1}{2} P^2 C$.

Dies gilt also auch bei Anwesenheit einer Induktivität und unabhängig davon, ob der Ladevorgang aperiodisch oder oszillierend ist.

c) Ausgleichvorgänge bei sinusförmiger Spannung.

Wirkt auf den Stromkreis eine Wechselspannung

$$p = p_m \sin(\omega t + \psi),$$

so ist der stationäre Strom nach Kap. II S. 22

$$i_e = i_m \sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

worin

$$i_m = \frac{p_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctg \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}.$$

φ ist ein Voreilungs- oder ein Verzögerungswinkel, je nachdem $\omega^2 LC$ kleiner oder größer als 1 ist.

Die Ladung des Kondensators ist

$$q_e = -\frac{i_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi + \varphi).$$

Wird der Stromkreis zur Zeit $t=0$ eingeschaltet, so ist

$$i_a = 0, \quad q_a = 0.$$

Für den Fall des oszillatorischen Einschaltvorgangs war nach S. 269

$$q_f = e^{-\alpha t} A \sin(\beta t + \delta) \quad \dots \quad (353a)$$

$$i_f = e^{-\alpha t} [-\alpha A \sin(\beta t + \delta) + \beta A \cos(\beta t + \delta)]. \quad (354a)$$

$$q_{f(0)} = -q_{e(0)} = \frac{i_m}{\omega} \cos(\psi + \varphi) = A \sin \delta$$

$$i_{f(0)} = -i_{e(0)} = -i_m \sin(\psi + \varphi) = -\alpha A \sin \delta + \beta A \cos \delta.$$

Somit wird

$$A \cos \delta = -\frac{i_m}{\beta} \sin(\psi + \varphi) + \frac{\alpha}{\omega \beta} i_m \cos(\psi + \varphi).$$

Die Gl. 354a für den freien Strom lautet hiermit

$$i_f = i_m e^{-\alpha t} \left[-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta \omega} \cos(\psi + \varphi) \sin \beta t + \frac{1}{\beta} \sin(\psi + \varphi) (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t) \right]$$

und da

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC}$$

$$i_f = i_m e^{-\alpha t} \left[-\frac{1}{\beta \omega LC} \cos(\psi + \varphi) \sin \beta t + \frac{1}{\beta \sqrt{LC}} \sin(\psi + \varphi) \sin \left(\beta t - \operatorname{artg} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] \quad (363)$$

Analog wird für die freie Ladung

$$q_f = q_m e^{-\alpha t} \left[-\frac{\omega}{\beta} \sin(\psi + \varphi) \sin \beta t + \frac{1}{\beta \sqrt{LC}} \cos(\psi + \varphi) \sin \left(\beta t + \operatorname{artg} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] \quad (364)$$

worin $q_m = \frac{i_m}{\omega} = p_{em} C$ die stationäre Amplitude der Ladung ist.

Hiernach erscheinen die gedämpften Schwingungen des freien Stromes und der Ladung aus je zwei Teilschwingungen zusammengesetzt, die gegeneinander um $\pi - \operatorname{artg} \beta/\alpha$ phasenverschoben sind.

Da
$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{4}{R^2 C} - 1}$$

bei schwach gedämpften Stromkreisen eine große Zahl ist, beträgt der Winkel fast 90° .

Die Amplituden hängen teils von $(\psi + \varphi)$, d. h. von dem Augenblick des Einschaltens ab und teils von dem Verhältnis der Eigenfrequenz β zur Netzfrequenz ω . Ist der Stromkreis schwach gedämpft, so ist in den zweiten Gliedern in Gl. 363 und 364 im Nenner $\beta \sqrt{LC} \simeq 1$. Diese Glieder können nicht größer werden als die stationären Amplituden i_m und q_m . Die erste Amplitude in der

Gl. 363 ist für $\cos(\psi + \varphi) = 1$ angenähert gleich $i_m \frac{\beta}{\omega}$. Sie wird,

wenn $\beta > \omega$ ist, um so viel größer als die stationäre Stromamplitude, wie die Eigenfrequenz größer ist als die Netzfrequenz. Für $\cos(\psi + \varphi) = 1$ wird die erste Amplitude in der Gl. 364 für die Ladung Null; sie wird am größten, wenn $\sin(\psi + \varphi) = 1$ ist, und

zwar ist sie dann $q_m \frac{\omega}{\beta}$. Ist $\beta < \omega$, so wird sie um so viel größer

als die stationäre Amplitude der Ladung, wie die Netzfrequenz größer als die Eigenfrequenz ist. Je nachdem also die Eigenfrequenz größer oder kleiner als die Netzfrequenz ist, treten die größeren freien Schwingungen im Strom und in der Drosselspulen- spannung, oder in der Ladung und der Kondensators- spannung auf.

Durch Zusammensetzung der beiden Teilschwingungen in Gl. 363 nach der Regel

$$i = \sqrt{i'^2 + i''^2 + 2i'i'' \cos(\varphi' - \varphi'')}$$

wird

$$i_f = \frac{i_m e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{LC}} \sqrt{1 + \cos^2(\psi + \varphi) \left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1 \right) + \frac{R}{2\omega L} \sin 2(\psi + \varphi)} \quad (365)$$

und analog für q_f . Differenziert man nach ψ , so erhält man als Bedingung für das Maximum der Amplitude

$$-\sin 2(\psi + \varphi) \left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1 \right) + \frac{R}{\omega L} \cos 2(\psi + \varphi) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2(\psi + \varphi) = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} = \operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$\psi + \varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \frac{3\varphi}{2}$$

1. Ist die Eigenfrequenz β wesentlich größer als die Netzfrequenz ω und R klein, so ist $\varphi \cong +90^\circ$, und $\psi + \varphi \cong 0$, d. h. der Zeitpunkt für den Nulldurchgang des Stromes und der maximalen Spannung gibt die größten Amplituden des freien Stromes. Sie wird, abgesehen von der Dämpfung und mit der Annäherung

$$\beta \sqrt{LC} \cong 1 \quad \frac{\beta}{\omega} i_m.$$

Die größte Amplitude der freien Ladung (und der Kondensatorspannung) wird nur ebenso groß wie die stationäre Amplitude, bei der Übereinanderlagerung ergibt sich nicht ganz die doppelte Spannung am Kondensator.

2. Ist die Eigenfrequenz β wesentlich kleiner als die Netzfrequenz ω und R klein, so ist $\varphi \cong -90^\circ$, die größte Amplitude der freien Schwingung ergibt sich beim Einschalten bei $\psi + \varphi = 90^\circ$, d. h. beim Maximum des Stromes oder beim Nulldurchgang der Spannung, die größte Amplitude tritt hier bei der Ladung auf und zwar $q_m \frac{\omega}{\beta}$.

3. Wird endlich mit der Resonanzfrequenz eingeschaltet, so ist $\omega^2 LC = 1$ und $\varphi = 0$. In Gl. 365 fällt das zweite Glied unter der Wurzel fort, das dritte kann sich nur in den Grenzen $\pm \frac{R}{2\omega L}$ ändern und ist gegen 1 meist zu vernachlässigen. Die freie Schwingung ist dann fast unabhängig von dem Einschaltmoment und der stationären stets entgegengesetzt, so daß ein allmähliches Einschwingen

des Stromes und der Ladung ohne Überströme und Überspannungen erfolgt.

Der wichtigste Fall ist der, daß die Eigenfrequenz höher als die Netzfrequenz ist. Ein Beispiel aus der Starkstromtechnik ist das Einschalten eines Transformators an die Unterspannung, an dessen Überspannungsseite ein unbelastetes Kabel angeschlossen ist. Das Kabel bildet mit den Streuinduktivitäten des Transformators und des Generators einen Schwingungskreis. Es sei

$$C = 10^{-6} \text{ F}, \quad L = 0,5 \text{ Henry}, \quad R = 30 \text{ Ohm}.$$

Die Eigenfrequenz ist $\frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 225$, sie ist 4,5mal so groß wie die Netzfrequenz (50 Per./sek.) und die größte Amplitude

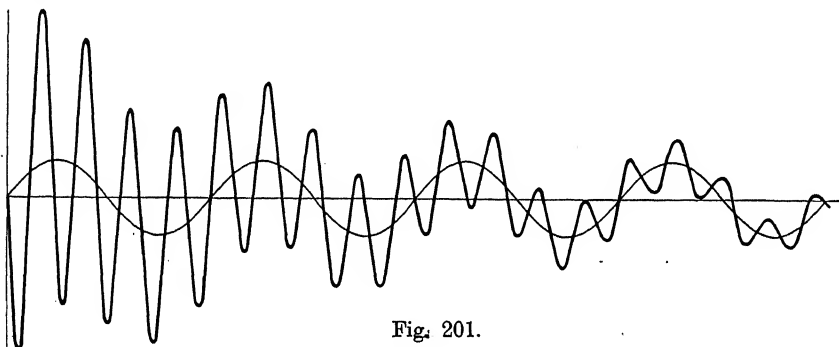


Fig. 201.

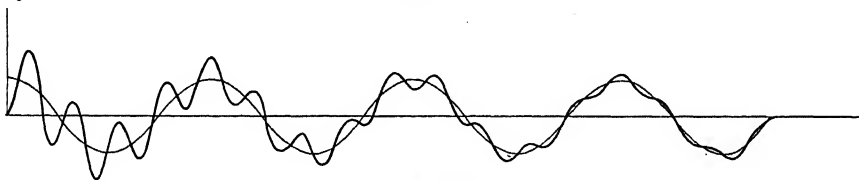


Fig. 202.

der freien Schwingung ist hiermit bestimmt. Fig. 201 zeigt das Einschwingen des Stromes, wenn beim Nulldurchgang des stationären Stromes, und Fig. 202 wenn beim Nulldurchgang der Spannung eingeschaltet wird. In anderem Maßstab zeigt die zweite Figur auch das Einschwingen der Ladung für den Einschaltmoment der ersten Fig., nur hat die stationäre Ladung ihr negatives Maximum, wenn der stationäre Strom seine positive Halbwelle beginnt. Die Ladung und Kondensatorspannung steigen etwa auf die doppelte Amplitude.

87. Symbolische Darstellung von Ausgleichströmen.

Bei konstanten Werten R, L, C führt die Beziehung zwischen Strom und Spannung zu einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Der Ausgleichstrom erscheint als das

partikuläre Integral der homogenen Differentialgleichung ($p=0$) in der Form

$$i_f = k e^{\gamma t},$$

worin γ eine reelle oder komplexe Zahl ist und im ersten Fall einen aperiodischen, im zweiten einen nach einer gedämpften Schwingung verlaufenden Ausgleichsvorgang kennzeichnet. Als Sonderfälle erscheinen hier die stationären Ströme, für $\gamma=0$ der Gleichstrom, für γ rein imaginär ($\pm j\omega$) der Wechselstrom.

Um die Exponenten γ des freien Stromes zu bestimmen, kann man nun abgekürzt symbolisch verfahren¹⁾. Man ersetzt analog wie bei der symbolischen Darstellung stationärer Wechselströme die Operation $\frac{d}{dt}$ durch die Multiplikation mit γ , die Operation $\int dt$ durch die Division mit γ und erhält an Stelle der linearen Differentialgleichung eine lineare algebraische Gleichung. Bei dem stationären Wechselstrom ergab sich die Beziehung zwischen Strom und Spannung in der Form

$$iz = p,$$

worin der „Scheinwiderstand“ z eine Funktion von $j\omega$ ist.

Ersetzt man $j\omega$ durch γ , so erhält man den „Operator“ für den freien Strom, der mit $Z_{(\gamma)}$ bezeichnet werde. Da nun für den freien Strom die Spannung Null ist, muß auch das Produkt $i_f Z_{(\gamma)} = 0$ sein, unabhängig davon wie groß i_f ist.

$$Z_{(\gamma)} = 0 \quad \dots \dots \dots (366)$$

ist die Bestimmungsgleichung für γ . Die Vereinfachung liegt hier darin, daß man zur Ermittlung von γ die Differentialgleichung nicht aufzustellen braucht.

Beispiel. Für den Stromkreis mit R, L, C in Reihe ist

$$Z_{(\gamma)} = R + \gamma L + \frac{1}{\gamma C} = 0,$$

$$\gamma^2 + \frac{R}{L} \gamma + \frac{1}{LC} = 0,$$

$$\gamma_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\alpha \pm j\beta$$

wie früher S. 268 für $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ gefunden.

Die Zahl (n) der Glieder des freien Stromes und die Zahl der Konstanten k ist bestimmt durch die Ordnung der homogenen linearen Differentialgleichung, bzw. hier durch die Ordnung der linearen algebraischen Gleichung $Z_{(\gamma)} = 0$.

¹⁾ s. Heaviside, Electromagnetic Theory, Bd. 2. — Kennelly, Proc. Inst. Rad. Engineers 1915.

Es stellt sich somit der freie Strom dar in der Form

$$i_f = \sum_{r=1}^{r=n} k_r e^{\gamma_r t} \quad (367)$$

Die Koeffizienten k können wie in den behandelten Beispielen aus den Anfangsbedingungen des Problems berechnet werden.

Nach einem Satz von Heaviside¹⁾ kann die Summe der erzwungenen und freien Glieder des Vorgangs direkt ermittelt werden. Er gilt nicht nur für elektromagnetische Zustandsänderungen, sondern allgemein für solche (z. B. auch mechanische), die auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führen. Ein Beweis dieses Satzes (der von Heaviside nicht geführt wurde) ist von K. W. Wagner²⁾ und W. Deutsch³⁾ gegeben, wir beschränken uns auf die Angabe der Ergebnisse und verweisen wegen des Beweises auf die Originalarbeiten.

Danach berechnet sich für ein System, in dem von der Zeit $t=0$ an eine in der Folgezeit konstante Kraft P wirkt, der zeitliche Verlauf jeder Systemgröße S durch die Gleichung

$$S = \frac{P}{Z_{(0)}} + P \sum_1^n \frac{e^{\gamma_r t}}{\gamma_r \left(\frac{dZ_{(\gamma)}}{d\gamma} \right)_{(\gamma=\gamma_r)}} \quad . . . (368)$$

$Z_{(\gamma)}$ ist der Operator für die gesuchte Größe, den man dadurch erhält, daß man in die Systemgleichungen für die veränderlichen Größen Ausdrücke der Form $k e^{\gamma t}$ einführt und alle bis auf die gesuchte eliminiert. Die γ_r sind die n Wurzeln der Gleichung $Z_{(\gamma)} = 0$. $Z_{(0)}$ erhält man durch Einsetzen von $\gamma = 0$.

Eine konstante eingeprägte Kraft ergibt sich in unserem Falle bei Einschaltvorgängen mit Gleichstrom.

Ist P eine Funktion der Zeit, wie z. B. bei Einschaltvorgängen mit Wechselstrom, $p_m \sin(\omega t + \psi)$, die als imaginärer Teil des Ausdrucks $p_m e^{j(\omega t + \psi)}$ eingeführt wird, so erhält man die Systemgröße als imaginären Teil des Ausdrucks

$$S = \frac{p_m e^{j(\omega t + \psi)}}{Z(j\omega)} + \sum_1^n \frac{p_m e^{\gamma_r t + j\psi}}{(\gamma_r - j\omega) \left(\frac{dZ_{(\gamma)}}{d\gamma} \right)_{(\gamma=\gamma_r)}} \quad (368a)$$

Beispiele. Für den Schwingungskreis hatten wir oben den Operator Z für den Strom angegeben. Beim Einschalten einer

¹⁾ Electromagnetic Theory, Bd. 2, London 1899.

²⁾ Arch. f. El., Bd. 4, S. 159.

³⁾ Ebenda, Bd. 6, S. 225.

Gleichspannung P wird das erste Glied in Gl. 368, da $Z_{(0)} = \infty$ ist, Null. Ferner wird für die beiden Wurzeln γ_1, γ_2

$$\gamma \frac{dZ}{d\gamma} = \gamma L - \frac{1}{\gamma C} = \pm 2j\beta L$$

$$i = \frac{P e^{-\alpha t}}{2j\beta L} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) = \frac{P}{\beta L} e^{-\alpha t} \sin \beta t \quad (\text{s. Gl. 361}).$$

Ist nicht der Strom, sondern etwa die Kondensatorspannung p_c die gesuchte Systemgröße, so eliminiert man alle anderen Größen und erhält den Operator in bezug auf p_c

$$Z_{(v)} = 1 + \gamma RC + \gamma^2 LC.$$

Es ergeben sich wieder die gleichen Wurzeln $\gamma_{1,2}$, hingegen ist hier $Z_{(0)} = 1$. In analoger Ableitung wird dann

$$p_c = P - \frac{P e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{LC}} \sin \left(\beta t + \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Für das Einschalten einer Spule mit Wechselstrom setzen wir $Z_{(v)} = R + j\omega L$. $Z_{(v)} = 0$ ergibt nur einen Wert $\gamma_1 = -\frac{R}{L}$. Daher ist

$$(\gamma_1 - j\omega) \left[\frac{dZ}{d\gamma} \right]_{\gamma_1} = - \left[\frac{R}{L} + j\omega \right] L = - [R + j\omega L].$$

Damit wird in Gl. 368a

$$S = \frac{p_m e^{j(\omega t + \psi)}}{R + j\omega L} - \frac{p_m e^{-\frac{R}{L}t + j\psi}}{R + j\omega L}.$$

Der imaginäre Teil dieses Ausdruckes wird mit $\frac{\omega L}{R} = \text{tg } \varphi$

$$i = \frac{p_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) - e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\psi - \varphi) \right].$$

88. Zusammengesetzte Stromkreise.

Sind zwei Stromkreise parallel an eine Stromquelle geschaltet, deren Spannung unabhängig von dem entnommenen Strom ist, so wird jeder Ausgleichsvorgang in einem Stromkreis sich so abspielen, als ob der andere nicht vorhanden wäre, und dieser wird von den Vorgängen in jenem unbeeinflusst bleiben. Ist die Spannung des einen Stromkreises, dagegen abhängig von den Vorgängen im anderen, wie es bei Zweigen zusammengesetzter Stromkreise der Fall ist, so wird ein Ausgleichsvorgang in einem Zweige auch einen solchen in dem anderen bedingen.

Als Beispiel betrachten wir die Schaltung Fig. 203, bei der zwei induktive Zweige mit einem dritten in Reihe geschaltet sind¹⁾.

¹⁾ s. Kuhlmann, Arch. f. Elektrotechnik Bd. I, S. 725.

Um die Koeffizienten γ der freien Schwingungen zu ermitteln, schreiben wir den Operator $Z_{(\gamma)}$ in der dem Scheinwiderstand des stationären Stromes entsprechenden Form

$$Z_{(\gamma)} = R + \gamma L + \frac{(R_1 + \gamma L_1)(R_2 + \gamma L_2)}{(R_1 + R_2) + \gamma(L_1 + L_2)}.$$

Er wird mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} RR_1 + RR_2 + R_1 R_2 &= \varrho \\ LL_1 + LL_2 + L_1 L_2 &= \lambda \\ R(L_1 + L_2) + R_1(L_2 + L) + R_2(L_1 + L) &= \nu \end{aligned} \right\} \quad (369)$$

$$Z_{(\gamma)} = \frac{\gamma^2 \lambda + \gamma \nu + \varrho}{(R_1 + R_2) + \gamma(L_1 + L_2)}.$$

Dieser Ausdruck wird Null, wenn der Zähler Null ist. Da $\nu^2 > 4 \varrho \lambda$ ist, werden beide Wurzeln von γ reell, es sind Dämpfungsfaktoren, die wir mit α_1 und α_2 bezeichnen.

$$\gamma_{1,2} = \alpha_{1,2} = -\frac{\nu \mp \sqrt{\nu^2 - 4 \varrho \lambda}}{2 \lambda} \quad \dots \quad (370)$$

Die freien Ströme verlaufen aperiodisch, der eine Teil ist schwach gedämpft, da für den Exponenten α_1 im Zähler eine Differenz steht.

Da hier die Anfangsbedingungen leicht zu ermitteln sind, soll nur untersucht werden, welche Bedeutung den schwach und den stark gedämpften Teilen der Ausgleichströme zukommt.

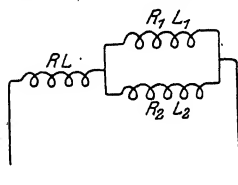


Fig. 203.

Die freien Ströme der beiden parallelen Zweige sind

$$\left. \begin{aligned} i_{1f} &= k_1' e^{\alpha_1 t} + k_1'' e^{\alpha_2 t} \\ i_{2f} &= k_2' e^{\alpha_1 t} + k_2'' e^{\alpha_2 t} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (371)$$

Die Beziehung zwischen den Koeffizienten k_1 und k_2 erhält man, indem man einen Strom durch den anderen ausdrückt. Setzt man z. B. einerseits die Spannung über RLR_1L_1 für den freien Strom gleich Null, andererseits über RLR_2L_2 , wobei der unverzweigte Strom die Summe $i_{1f} + i_{2f}$ ist, so erhält man symbolisch

$$\begin{aligned} 0 &= i_{1f}[(R + R_1) + \alpha(L + L_1)] + i_{2f}(R + \alpha L) \\ 0 &= i_{2f}[(R + R_2) + \alpha(L + L_2)] + i_{1f}(R + \alpha L). \end{aligned}$$

Hieraus eliminiert man die Glieder mit $i_{1f}\alpha$, indem man die erste Gleichung mit L , die zweite mit $(L + L_1)$ multipliziert und subtrahiert, es wird

$$i_{1f} = -i_{2f} \frac{RL_1 + R_2(L + L_1) + \alpha(L_1 L_2 + LL_1 + LL_2)}{(RL_1 - R_1 L)}.$$

Durch Einsetzen des Wertes von i_{3f} aus Gl. 371 ist

$$i_{1f} = - \frac{k_2' e^{\alpha_1 t} [RL_1 + R_2(L+L_1) + \alpha_1 \lambda] + k_2'' e^{\alpha_2 t} [RL_1 + R_2(L+L_1) + \alpha_2 \lambda]}{(RL_1 - R_1 L)}$$

daher

$$\left. \begin{aligned} k_1' &= -k_2' \frac{RL_1 + R_2(L+L_1) + \alpha_1 \lambda}{RL_1 - R_1 L} = -k_2' A_1 \\ k_1'' &= -k_2'' \frac{RL_1 + R_2(L+L_1) + \alpha_2 \lambda}{RL_1 - R_1 L} = -k_2'' A_2 \end{aligned} \right\} \quad (372)$$

worin durch Einsetzen von α_1 und α_2 aus Gl. 370 und λ aus Gl. 369

$$A_{1,2} = \frac{R(L_1 - L_2) + R_2(L+L_1) - R_1(L+L_2) \pm \sqrt{\nu^2 - 4\rho\lambda}}{2(RL_1 - R_1 L)}$$

Für gleiche parallele Zweige ist $R_1 = R_2$, $L_1 = L_2$ und

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \pm \frac{\sqrt{\nu^2 - 4\rho\lambda}}{2(RL_1 - R_1 L)} = \pm 1, \\ k_1' &= -k_2' \quad \text{und} \quad k_1'' = +k_2'' \quad \dots \quad (372a) \end{aligned}$$

Der unverzweigte Strom ist allgemein

$$i_f = i_{1f} + i_{2f} = (k_1' + k_2') e^{\alpha_1 t} + (k_1'' + k_2'') e^{\alpha_2 t}$$

und für gleiche Zweige

$$i_f = 2 k_2'' e^{\alpha_2 t}.$$

Der schwach gedämpfte Ausgleichstrom tritt hierbei in dem vorgeschalteten Zweig gar nicht auf, sondern er verläuft lediglich als ein Kreisstrom in den beiden parallelgeschalteten Zweigen. In dem unverzweigten Stromkreis tritt nur die Summe der beiden schnell abklingenden freien Ströme auf; hier kann also der Ausgleichsvorgang schon längst abgelaufen sein, während er in den parallelen Zweigen fortbesteht.

Aus den Anfangswerten der freien Ströme

$$\begin{aligned} i_{1f(0)} &= k_1' + k_1'' = -A_1 k_2' - A_2 k_2'' \\ i_{2f(0)} &= k_2' + k_2'' \end{aligned}$$

erhält man

$$\left. \begin{aligned} k_2' &= \frac{i_{1f(0)} + A_2 i_{2f(0)}}{A_2 - A_1} \\ k_2'' &= \frac{i_{1f(0)} + A_1 i_{2f(0)}}{A_1 - A_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (373)$$

und für gleiche Stromzweige nach Gl. 372a

$$\left. \begin{aligned} k_2' &= -\frac{i_{1f(0)} - i_{2f(0)}}{2} \\ k_2'' &= \frac{i_{1f(0)} + i_{2f(0)}}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (373a)$$

Wird z. B. der ganze Stromkreis eingeschaltet, so ist für gleiche Stromzweige

$$\begin{aligned} i_{1f(0)} &= i_{2f(0)} \\ \text{und daher} \quad k_2' &= 0. \end{aligned}$$

Der langsam ausklingende Teil des freien Stromes, der nur in den parallelgeschalteten Zweigen auftritt, fällt hier fort, und es bleibt nur der schnell abklingende Teil.

War dagegen der eine Stromzweig (1) eingeschaltet und wird der zweite dazugeschaltet, so ist für diesen

$$i_{2a(0)} = 0, \quad i_{2f(0)} = -i_{2e(0)}.$$

Dann ist für gleiche Zweige

$$\begin{aligned} k_2' &= -\frac{i_{1a(0)} - i_{1e(0)} + i_{2e(0)}}{2} = -\frac{i_{1a(0)}}{2} \\ k_2'' &= \frac{i_{1a(0)} - i_{1e(0)} - i_{2e(0)}}{2} = \frac{i_{1a(0)}}{2} - i_{1e(0)}. \end{aligned}$$

Die Ströme während der Übergangszeit sind für diesen Fall

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{1e} + i_{1f} = i_{1e} + \frac{i_{1a(0)}}{2} e^{\alpha_1 t} + \left[\frac{i_{1a(0)}}{2} - i_{1e(0)} \right] e^{\alpha_2 t} \\ i_2 &= i_{2e} + i_{2f} = i_{1e} - \frac{i_{1a(0)}}{2} e^{\alpha_1 t} + \left[\frac{i_{1a(0)}}{2} - i_{1e(0)} \right] e^{\alpha_2 t}. \end{aligned}$$

Das schwach gedämpfte Glied des freien Stromes, das in beiden Zweigen entgegengesetztes Vorzeichen hat und in dem vorgeschalteten Zweig nicht auftritt, ist hier gleich dem halben Anfangswert des Stromes, in dem nicht geschaltet wurde. Dieser Kreisstrom entspricht einer Ladung des Feldes des zugeschalteten Stromkreises durch den schon eingeschalteten; er fällt fort, wenn die vorgeschaltete Impedanz (R, L) gleich Null ist.

Enthalten die Stromkreise Eisen, wie z. B. wenn 1 und 2 zwei Transformatoren bezeichnen, die über eine lange Leitung mit großem Spannungsabfall gespeist werden, so können, wie auf S. 262 gezeigt wurde, durch Sättigung und Remanenz die Stromstöße beim Schalten sehr groß werden.

Kuhlmann¹⁾ beobachtete beim Einschalten eines Transformators, daß infolge des Stromstoßes nicht nur bei diesem, sondern auch bei einem benachbarten Transformator, der über die gleiche Fernleitung gespeist wurde, der selbsttätige Überstromschalter auslöste. Wie aus der Berechnung hervorgeht, ist dies dem großen Spannungsabfall in der Leitung und der dadurch hervorgerufenen gegenseitigen Beeinflussung der Stromkreise zuzuschreiben. Durch Verwendung eines Schalters mit Widerstandsvorstufe läßt sich auch hier der Stromstoß in zulässigen Grenzen halten.

¹⁾ l. c.

89. Stromkreise mit gegenseitiger Induktion.

Ein Transformator. Die Transformatorgleichungen lauten symbolisch:

$$\begin{cases} p_1 = i_1 (R_1 + \gamma L_1) + i_2 \gamma M \\ 0 = i_2 (R_2 + \gamma L_2) + i_1 \gamma M \end{cases} \quad (374)$$

woraus

$$i_2 = - \frac{i_1 \gamma M}{R_2 + \gamma L_2} \quad (375)$$

in die erste Gleichung eingesetzt, den Operator ergibt

$$Z_{(\gamma)} = \frac{(R_1 + \gamma L_1)(R_2 + \gamma L_2) - \gamma^2 M^2}{R_2 + \gamma L_2}.$$

Für endliche Werte des Nenners wird der Ausdruck Null, wenn

$$\gamma^2 (L_1 L_2 - M^2) + \gamma (R_1 L_2 + R_2 L_1) + R_1 R_2 = 0.$$

Die beiden Wurzeln von γ sind wieder reell, d. h. Dämpfungsfaktoren,

$$\gamma_{1,2} = \alpha_{1,2} = - \frac{R_1 L_2 + R_2 L_1 \mp \sqrt{(R_1 L_2 - R_2 L_1)^2 + 4 R_1 R_2 M^2}}{2 (L_1 L_2 - M^2)} \quad (376)$$

Die freien Ströme sind aperiodisch, ein Teil ist schwach gedämpft, entsprechend der Differenz im Zähler von α_1 .

Für

$$\begin{aligned} i_{1f} &= k_1' e^{\alpha_1 t} + k_1'' e^{\alpha_2 t} \\ i_{2f} &= k_2' e^{\alpha_1 t} + k_2'' e^{\alpha_2 t} \end{aligned}$$

wird durch Einsetzen in Gl. 375

$$\left. \begin{aligned} k_2' &= -k_1' \frac{\alpha_1 M}{R_2 + \alpha_1 L_2} \\ k_2'' &= -k_1'' \frac{\alpha_2 M}{R_2 + \alpha_2 L_2} \end{aligned} \right\} \quad (377)$$

Als Beispiel werde das Einschalten des kurzgeschlossenen Transformators betrachtet. Hierfür kann man setzen

$$R_1 = R_2 = R, \quad L_1 = L_2 = L,$$

und die Dämpfungsfaktoren in Gl. 376 werden

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= - \frac{R(L - M)}{L^2 - M^2} = - \frac{R}{L + M} \\ \alpha_2 &= - \frac{R(L + M)}{L^2 - M^2} = - \frac{R}{L - M} = - \frac{R}{S} \end{aligned} \right\} \quad (376a)$$

worin $S = (L - M)$ die Streuinduktivität ist.

Der zweite Dämpfungsfaktor ist groß, weil S klein ist, der erste ist sehr klein. M ist nicht viel kleiner als L , daher α_1 etwa halb so groß wie der Dämpfungsfaktor beim leerlaufenden Transformator.

In Gl. 377 wird hier

$$k_2' = +k_1', \quad k_2'' = -k_1''.$$

Die stationären Kurzschlußströme sind $i_{1k(0)}$ und $i_{2k(0)}$, und

$$\begin{aligned} i_{1f(0)} &= -i_{1k(0)} = k_1' + k_1'' \\ i_{2f(0)} &= -i_{2k(0)} = k_2' + k_2'' = k_1' - k_1''. \end{aligned}$$

Daher

$$\left. \begin{aligned} k_1' &= -\frac{i_{1k(0)} + i_{2k(0)}}{2} \\ k_1'' &= -\frac{i_{1k(0)} - i_{2k(0)}}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (378)$$

und die Ausgleichsströme

$$\left. \begin{aligned} i_{1f} &= -\frac{i_{1k(0)} + i_{2k(0)}}{2} e^{-\frac{R}{L+M}t} - \frac{i_{1k(0)} - i_{2k(0)}}{2} e^{-\frac{R}{S}t} \\ i_{2f} &= -\frac{i_{1k(0)} + i_{2k(0)}}{2} e^{-\frac{R}{L+M}t} + \frac{i_{1k(0)} - i_{2k(0)}}{2} e^{-\frac{R}{S}t} \end{aligned} \right\} (379)$$

Die Glieder haben folgende Bedeutung: die ersten schwach gedämpften Teile sind primär und sekundär gleichgerichtet, ihr Anfangswert ist gleich der halben Summe der stationären Ströme, d. h. des stationären Magnetisierungsstromes. Sie stellen die Teile der freien Ströme dar, die den Hauptfluß erzeugen; jede Wicklung trägt die Hälfte dazu bei.

Dieser Teil kann durch Remanenz und Sättigung hohe Werte annehmen, jedoch nicht so hohe wie bei Leerlauf, erstens weil der Fluß bei Kurzschluß kleiner ist als bei Leerlauf, und zweitens, weil die Wicklungen sich unterstützen.

Der zweite Teil des freien Stromes, der in beiden Wicklungen entgegengesetzt gerichtet ist, hängt von der Differenz der beiden Kurzschlußströme ab, und da diese um fast 180° gegeneinander phasenverschoben sind, ist sein Anfangswert fast ebenso groß wie der Kurzschlußstrom jeder Wicklung für $t=0$. Dieser Teil klingt schnell ab. Nimmt man an, daß $\frac{R}{\omega S} = \frac{1}{3}$, also $\frac{R}{S} = \frac{\omega}{3}$ ist, so ist

nach $\frac{1}{2}$ Periode $e^{-\frac{R}{S} \frac{T}{2}} = e^{-\frac{\pi}{3}} = 0,35$, dieser Teil kann nach Umkehr der Richtung des stationären Kurzschlußstromes diesen nicht wesentlich verstärken. Der erste Teil hingegen, der länger andauert, kann durch Überlagerung über die stationären Kurzschlußströme sehr hohe Stromstöße und große mechanische Kräfte zwischen den Wicklungen hervorrufen.

Analog stellt sich die Berechnung für einen Kurzschluß des belasteten Transformators. Hier sind die Anfangsströme $i_{1a(0)}$ und $i_{2a(0)}$ durch die Belastung gegeben, man erhält

$$\begin{aligned}
i_{1f(0)} &= k_1' + k_1'' = i_{1a(0)} - i_{1k(0)} \\
i_{2f(0)} &= k_1' - k_1'' = i_{2a(0)} - i_{2k(0)} \\
k_1' &= \frac{[i_{1a(0)} + i_{2a(0)}] - [i_{1k(0)} + i_{2k(0)}]}{2} \\
k_1'' &= \frac{[i_{1a(0)} - i_{2a(0)}] - [i_{1k(0)} - i_{2k(0)}]}{2}
\end{aligned}$$

Der erste Faktor enthält hier die Differenz des Magnetisierungsstromes bei Belastung und jenes bei Kurzschluß. Da der Fluß bei Belastung fast ebenso groß ist wie bei Leerlauf und der bei Kurzschluß klein ist, nähern sich hier die Verhältnisse mehr denen beim Einschalten des unbelasteten Transformators, so daß die Stromstöße bei Kurzschluß des belasteten oder leerlaufenden Transformators noch größer werden können als beim Einschalten des sekundär kurzgeschlossenen Transformators.

90. Ausschaltvorgänge.

Wir betrachten das Ausschalten des induktiven Stromkreises als Beispiel eines Ausgleichsvorganges mit veränderlichem Widerstand.

Beim Ausschalten eines Stromkreises muß die in ihm aufgespeicherte magnetische und elektrische Energie in eine andere Energieform, z. B. in Wärme, umgewandelt werden. Hierzu ist eine gewisse Zeit erforderlich. Der Strom verschwindet nicht augenblicklich, sondern er bleibt zunächst über einen Lichtbogen bestehen, der sich zwischen den Schalterkontakten bildet. Je mehr die Kontakte sich voneinander entfernen, um so größer wird der Widerstand des Lichtbogens, um so mehr wird der Strom geschwächt.

Eine exakte Beschreibung des Vorgangs müßte also von den Erscheinungen im Lichtbogen selbst ausgehen, die sich aber nicht analytisch ausdrücken lassen¹⁾. Begnügt man sich, die Rückwirkung des Vorgangs auf den Stromkreis zu untersuchen, so kann man eine bestimmte Annahme über den Widerstand des Lichtbogens machen. Zu Beginn des Vorgangs ist der Widerstand des Stromkreises R , nach einer gewissen Zeit τ , der Ausschaltzeit, ist er unendlich groß. Macht man nun für den Widerstand in der Zwischenzeit nach Arons²⁾ den Ansatz

$$\frac{R}{1 - \frac{t}{\tau}} \quad \dots \dots \dots (380)$$

¹⁾ Untersuchungen über Ausschaltvorgänge s. Philippi, Diss., Danzig. Marguerre, ETZ 1912. Höpp, ETZ 1913, S. 33, 1920, S. 748. Bauer, Bull. des Schweiz. El. Vereins 1915. Biermanns u. Stern, ETZ 1916.

²⁾ Wiedem. Annalen 1897, Bd. 63, S. 177; ETZ 1899, S. 601.

so ist für einen induktiven Stromkreis

$$L \frac{di}{dt} + \frac{R}{1 - \frac{\tau}{t}} i = p \quad (381)$$

Setzt man

$$t = \tau x, \quad dt = \tau dx,$$

so wird

$$\frac{di}{dx} + \frac{R \tau i}{L(1-x)} = \frac{p \tau}{L} \quad (381a)$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist

$$i = e^{-\int \frac{R \tau}{L(1-x)} dx} \left(\int \frac{p \tau}{L} e^{\int \frac{R \tau}{L(1-x)} dx} dx + C \right) \quad . . . (382)$$

$$\text{Es ist} \quad \int \frac{R \tau}{L(1-x)} dx = -\frac{R}{L} \tau \ln(1-x),$$

daher

$$i = (1-x)^{\frac{R \tau}{L}} \left[\frac{p \tau}{L} \int (1-x)^{-\frac{R \tau}{L}} dx + C \right] \quad . . . (383)$$

Es ist nun zu unterscheiden, ob die Ausschaltzeit τ verschieden von der Zeitkonstanten $\frac{L}{R}$ des Stromkreises oder ihr gleich ist.

Ist zunächst $\frac{L}{R} \geq \tau$, so wird

$$\begin{aligned} \int (1-x)^{-\frac{R \tau}{L}} dx &= -\int (1-x)^{-\frac{R \tau}{L}} d(1-x) \\ &= \frac{L}{R \tau - L} (1-x)^{\left(1 - \frac{R \tau}{L}\right)}, \end{aligned}$$

und mit diesem Wert wird Gl. 383

$$i = \frac{p \tau}{R \tau - L} (1-x) + C (1-x)^{\frac{R \tau}{L}}.$$

$$\text{Für } x=0 \text{ ist } i=i_0 = \frac{p \tau}{R \tau - L} + C,$$

daher

$$i = \frac{p \tau}{R \tau - L} (1-x) + \left(i_0 - \frac{p \tau}{R \tau - L} \right) (1-x)^{\frac{R \tau}{L}} \quad . . . (384)$$

Ist zweitens $\frac{L}{R} = \tau$, so wird Gl. 383

$$i = (1-x) \left[\frac{p \tau}{L} \int \frac{dx}{1-x} + C \right] = (1-x) \left[C - \frac{p \tau}{L} \ln(1-x) \right].$$

Bestimmt man die Integrationskonstante wieder aus

$$x=0, \quad i=i_0=C,$$

so wird

$$i = (1-x) \left[i_0 + \frac{p\tau}{L} \ln \frac{1}{1-x} \right] \quad \dots \quad (385)$$

Für den Verlauf des Stromes ist das Verhältnis der Ausschaltzeit τ zur Zeitkonstante $\frac{L}{R}$ maßgebend. Für einen induktionsfreien Stromkreis ist $L=0$ und daher $\frac{R\tau}{L} = \infty$. Für diesen Grenzfall für den $i_0 = \frac{p}{R}$ ist, erhält das zweite Glied in Gl. 384 die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$, ihr Wert ist Null. Es bleibt das erste Glied und der Strom nimmt linear nach der Gleichung

$$i = \frac{p}{R} (1-x)$$

ab. Je größer die Selbstinduktion ist, um so langsamer verschwindet der Strom anfänglich, um so schneller muß er gegen Ende der Ausschaltzeit verschwinden. Fig. 204 zeigt den Verlauf des Stromes nach Gl. 304 für das Abschalten eines Gleichstromes, für verschiedene Werte von $\frac{R\tau}{L}$.

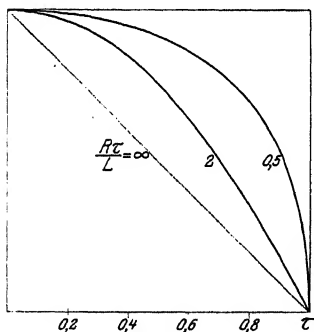


Fig. 204.

Das schnelle Verschwinden des Stromes gegen Ende der Ausschaltzeit bedingt sehr hohe Selbstinduktionsspannungen und dadurch hohe Spannungen am Lichtbogen.

Für einen Gleichstromkreis ist $p = i_0 R$, und die Widerstandsspannung ist nach Gl. 384 und 380 für $\frac{L}{R} \geq \tau$

$$iR = p \frac{(1-x) - \frac{L}{R\tau} (1-x) \left(\frac{R\tau}{L} \right)}{1 - \frac{L}{R\tau}}$$

und für $\frac{L}{R} = \tau$ nach Gl. 385

$$iR = p(1-x) \left[1 + \frac{R\tau}{L} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \right].$$

Der Widerstand des Lichtbogens ist

$$\frac{R}{1-x} - R = \frac{Rx}{1-x}.$$

Daher die Lichtbogenspannung für die beiden Fälle

$$p_l = iR \frac{x}{1-x} = p \frac{x - \frac{L}{R\tau} x(1-x)^{\left(\frac{R\tau}{L}-1\right)}}{1 - \frac{L}{R\tau}}$$

und

$$p_l = px \left(1 + \frac{R\tau}{L} \ln \frac{1}{1-x} \right).$$

Am Ende der Schaltzeit, $x=1$, ist

$$\left. \begin{array}{ll} \text{für } \frac{L}{R} < \tau & p_l = \frac{p}{1 - \frac{R}{L} \tau} \\ \text{„ } \frac{L}{R} \geq \tau & p_l = \infty \end{array} \right\} \dots \dots \dots (386)$$

p_l ist außer für $L=0$ am Ende der Schaltzeit größer als die Netzspannung, um so mehr, je größer die Zeitkonstante ist. Ist diese gleich oder größer als die Ausschaltzeit, so ergibt die Rechnung $p_l = \infty$, was dahin zu deuten ist, daß der Lichtbogen stehen bleibt und die Ausschaltzeit verlängert. Sie ist daher keine Konstante eines Schalters, sondern von den Größen des Stromkreises abhängig.

Die hohen Selbstinduktionsspannungen beim schnellen Ausschalten gefährden die Isolation der Leitungen. Magnetwicklungen werden oft nicht direkt ausgeschaltet, sondern erst über einen Widerstand geschlossen.

Nun hat jeder Lichtbogen in gewissen Grenzen eine labile Charakteristik, seine Spannung wird mit abnehmendem Strom größer. Der Abschaltvorgang bei Gleichstrom spielt sich daher so ab, daß beim Entfernen der Kontakte die Länge des Lichtbogens und seine Spannung soweit vergrößert werden, bis infolge des sinkenden Stromes die Spannung zur Aufrechterhaltung des Lichtbogens nicht mehr ausreicht. Durch geeignete Formgebung des Schalters (z. B. als Hörnerschalter) wird erreicht, daß der Lichtbogen durch Wärmeauftrieb und dynamische Wirkung sich selbst verlängert. Häufig wird der Ausschaltvorgang durch Blasmagneten beschleunigt, um den Abbrand der Kontakte zu verringern und allzu lange Lichtbogen zu vermeiden.

Grundsätzlich verschieden ist der Vorgang bei Wechselstrom. Dieser hat nach jeder Halbperiode einen Nulldurchgang, dabei erlischt der Lichtbogen. Gelänge es, das Abschalten so zu gestalten, daß vom Augenblick des Öffnens des Schalters der Strom nach seiner betriebsmäßigen Sinuskurve bis zum nächsten Nulldurchgang verläuft und der Lichtbogen danach nicht wieder zündet, so könnte keine größere Selbstinduktionsspannung entstehen als die stationäre

Amplitude $i_m \omega L$. Meist findet aber nach dem Nulldurchgang des Stromes ein Neuzünden statt, um so eher, je größer die momentane Spannung beim Nulldurchgang des Stromes, d. h. die Phasenverschiebung ist. Ein Wechselstromlichtbogen dauert daher im allgemeinen während mehrerer Perioden an, bis die Schalterpole soweit voneinander entfernt sind, daß die Neuzündung nicht mehr erfolgt. Bei hohen Wechselspannungen wird der Lichtbogen in Luft außerordentlich lang, man verwendet daher meist Ölschalter, bei denen die Kontakte und der Lichtbogen durch das Öl gekühlt werden und die Zündspannung beträchtlich höher liegt, so daß der Lichtbogen weniger lange andauert, als bei Luftschaltern.

Die Gefahr hoher Ausschaltüberspannungen bei Wechselstrom besteht meist nur beim Ausschalten schwacher Ströme in stark induktiven Kreisen, z. B. des Leerstromes eines Transformators oder Induktionsmotors, weil bei schwachen Strömen und großer Schaltgeschwindigkeit der Lichtbogen schnell labil werden und den Strom schon in der ersten Halbperiode zu einem schnelleren Abfall bringen kann, als der Sinuskurve entspricht. Je steiler dieser Abfall gegen den beim betriebsmäßigen Nulldurchgang, um so höher die Überspannung.

Bei Induktionsmotoren trennt man die Statorwicklung nur vom Netz, wenn der Läufer über einen Widerstand geschlossen ist. Beim Leerabschalten von Transformatoren verwendet man oft eine Widerstandsvorstufe. Sie ist so zu bemessen, daß für beide Schaltstufen der Lichtbogen etwa gleich lang wird. Der Lichtbogen der Vorstufe liegt dem Vorschaltwiderstand R parallel; ist seine Zündspannung $e_{z1} > i'_m R$, so kann er nicht mehr entstehen. i'_m ist der Leerstrom bei vorgeschaltetem Widerstand. An der Hauptstufe besteht beim Nulldurchgang des Stromes die Spannung $p_m \sin \varphi$, der Lichtbogen zündet nicht mehr, wenn die Zündspannung $e_{z2} > p_m \sin \varphi$ ist. Es soll daher $i'_m R \cong p_m \sin \varphi$ sein, und da die beiden Spannungen um 90° phasenverschoben sind, soll jede etwa 70% der Netzspannung betragen. Den Strom i' entnimmt man der Magnetisierungskurve für $0,7 p$ und bemißt den Widerstand so, daß $i' R \cong 0,7 p$ wird. Er ist wesentlich größer als der zur Vermeidung des Einschaltstromstoßes.

Beim Abschalten großer Ströme, z. B. beim Unterbrechen eines Kurzschlusses, beanspruchen die thermischen und dynamischen Vorgänge im Schalter selbst das überwiegende Interesse. Die im Lichtbogen auf geringem Raum verzehrten großen Energiemengen werden teils zur Zersetzung des Öles, teils zum Schmelzen und Verdampfen der Elektroden und des Öles verbraucht. Der in sehr kurzer Zeit vor sich gehende Verdampfungs- und Vergasungsvorgang bedingt eine beträchtliche Drucksteigerung. Die Vermeidung des Herausschleuderns von brennendem Öl und des Austritts von Rauch, die zu Bränden und Überschlagen führen, stellen hohe Anforderungen an die

Schalterkonstruktion. Um die schädlichen Wirkungen des Lichtbogens bei großen Strömen zu reduzieren, ist anzustreben, die Neuzündung nach dem ersten betriebsmäßigen Nulldurchgang zu verhindern. Da bei hohen Spannungen auch ein sehr langer Lichtbogen doch nur einen kleinen Teil der Spannung aufnimmt, kann er den Verlauf eines großen Stromes nicht wesentlich beeinflussen, es besteht bei großen Strömen weniger Gefahr des vorzeitigen Abreißen und der Überspannungen. Daher hat es auch keinen Zweck, den Lichtbogen länger bestehen zu lassen.

Durch besonders hohe Ausschaltgeschwindigkeiten (Schnellkontakte) und intensive Kühlwirkung des Öles sucht man zu erreichen, die größten Ströme in $\frac{1}{3}$ Periode zu unterbrechen.

Besondere Eigenschaften zeigt das Ausschalten eines Kondensators. Erlischt der Lichtbogen beim betriebsmäßigen Nulldurchgang des Ladestromes, so haben die Ladung und Spannung p_m gerade ihren Höchstwert. Der Kondensator behält seine Ladung bei, die Netzspannung setzt ihre Schwingung fort und erreicht nach $\frac{1}{2}$ Periode ihren Höchstwert entgegengesetzter Richtung $-p_m$. Hier besteht am Schalter die doppelte Spannung $-2p_m$, die zur Neuzündung führen kann, falls sie nicht schon vorher eintrat. Erfolgt die Ladung des Kondensators in Schwingungen (mit der Induktivität der Zuleitung), so schwingt seine Spannung auf etwa die doppelte Einschaltspannung ($-4p_m$) von ihrem Anfangswert $+p_m$ an, erreicht also nahezu die dreifache Amplitude.

Diese Rückzündungen treten häufig beim Abschalten von leeren Leitungen und Kabeln auf, zur Verminderung der dadurch entstehenden Überspannungen verwendet man einen Schalter mit Widerstandsstufe.

Beim Erdschluß einer Leitung fällt ihre Spannung gegen Erde auf Null, die der anderen Phase steigt auf die Linienspannung. Durch die Erdschlußstelle fließt der Ladestrom der Teilkapazitäten gegen Erde der nicht geerdeten Phasen unter Linienspannung, der sogenannte Erdschlußstrom. Bei jedem Neuzünden wird das Netz in starke Schwingungen versetzt. Die hierbei auftretenden Überspannungen, und die großen Ausdehnungen, die ein solcher intermittierender Erdschlußlichtbogen annimmt, wobei er oft auf andere Leitungen überspringt und zum Kurzschluß führt, machen ihn gefährlich. Das vorzüglichste Mittel zu seiner Unterdrückung ist die Erdschlußdrosselspule von Petersen¹⁾, die zwischen den Nullpunkt des Stromerzeugers oder Transformators und Erde geschaltet ist; sie nimmt unter Phasenspannung gerade den Erdschlußstrom auf, so daß die Erdschlußstelle davon entlastet ist.

¹⁾ s. ETZ 1919. S. 5.

Vierzehntes Kapitel.

Ausgleichsvorgänge in nicht stationären Stromkreisen.

91. Die Gleichungen der freien Schwingungen auf Leitungen. — 92. Freie Schwingungen bei offener oder bei kurzgeschlossener Leitung. — 93. Reflexion der Wellen an Widerstand, Induktivität und Kapazität. — 94. Reflexion an der Übergangsstelle von Leitungen mit verschiedener Charakteristik. — 95. Widerstand, Kapazität und Induktivität an der Übergangsstelle von zwei Leitungen. — 96. Verzernte Wellen.

91. Die Gleichungen der freien Schwingungen auf Leitungen.

Die im letzten Kapitel untersuchten Ausgleichsvorgänge in elektrischen Stromkreisen beschränkten sich auf die Fälle, bei denen wir die elektrischen und magnetischen Felder je für sich in bestimmten Teilen des Stromkreises bestehend, d. h. Induktivität und Kapazität in diesen Teilen konzentriert, annehmen können.

Diese Annahme setzt voraus, daß in jedem Augenblick in jedem Punkt des betrachteten Teiles des Stromkreises der gleiche Zustand und die gleiche Zustandsänderung herrschen, oder, daß die Zeit für die Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung über den ganzen betrachteten Teil des Stromkreises verschwindend klein ist gegen die Dauer der Zustandsänderung selbst.

Im folgenden untersuchen wir die wesentlich schneller verlaufende Fortpflanzung einer Zustandsänderung von einem Punkt des Stromkreises zum nächsten, d. h. Stromkreise, bei denen der Zustand von Punkt zu Punkt sich ändert, und bezeichnen sie als nicht stationäre.

Die Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung geht nach der Maxwellschen Theorie der Elektrizität durch elektromagnetische Wellen vor sich, die sich nach allen Richtungen im Raum ausbreiten. Ihr nutzbares Anwendungsgebiet ist die Funkentelegraphie. Sie bieten aber auch für die Starkstromtechnik Interesse, weil hier als ihre Folge gewisse Überspannungserscheinungen auftreten, die Schutzmaßnahmen erfordern.

Wir betrachten hier den Sonderfall der Fortpflanzung von ebenen elektromagnetischen Wellen, d. h. solche elektromagnetische Felder, bei denen die elektrischen und magnetischen Kraftlinien in einer Ebene verlaufen. Dieser Fall liegt bei Freileitungen und Kabeln vor. Die magnetischen Kraftlinien umschlingen die Leiter in derselben Ebene senkrecht zur Leiterachse, in der die elektrischen Kraftlinien von einem Leiter zum anderen und zur Erde verlaufen.

Nun ist nach dem Poyntingschen Satz der Vektor des Energieflusses proportional dem Produkt aus elektrischer und magnetischer Feldstärke und dem Sinus des Winkels zwischen ihnen, und er ist senkrecht zu ihnen gerichtet. Die Richtung des Energieflusses ist die Fortpflanzungsrichtung der elektromagnetischen Welle, ebene Wellen von Freileitungen und Kabeln pflanzen sich nur in einer Richtung, der Richtung der Leiterachse fort.

Eine geringfügige Abweichung von der ebenen Beschaffenheit weist das Feld einer Leitung in der Nähe der Leiter auf. Weil die Leiter nicht unendlich große Leitfähigkeit besitzen und das Dielektrikum kein vollkommener Isolator ist, strömt ein Teil der Energie in den Leiter, ein Teil bleibt im Dielektrikum.

Für die Berechnung legt man nun, wie für die Darstellung der stationären Verteilung der Ströme und Spannungen auf Leitungen (s. Kap. XI) gleichmäßig verteilte Induktivität, Kapazität, Widerstand und Ableitung zugrunde.

Die Übertragung dieser von dem stationären Zustand abgeleiteten Größen auf den nicht stationären Zustand gibt, wie nähere Untersuchungen zeigen¹⁾, für ebene Wellen formell richtige Resultate.

Wir gehen daher von der Doppelleitung aus und suchen für ihre Differentialgleichungen (Kap. XI Gl. 206 u. 207) das allgemeine Integral. Es ist

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \dots \quad (387)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Ap + C \frac{\partial p}{\partial t} \quad \dots \quad (388)$$

Differentiiert man jede Gleichung nochmals nach x und setzt die andere ein, so wird

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = RAp + (CR + LA) \frac{\partial p}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \dots \quad (389)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RAi + (CR + LA) \frac{\partial i}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad \dots \quad (390)$$

¹⁾ s. Mie, Ann. d. Phys. 1900, S. 201. Cohn, Elektromagn. Feld 1900 S. 449. Abraham, Phys. Zeitschr. 1901, S. 329; 1905, S. 174.

Beide Gleichungen haben dieselbe Form, wir brauchen daher nur eine zu betrachten, z. B. die für die Spannung p .

Sie läßt sich so umformen, daß der erste Differentialquotient nach der Zeit nicht mehr vorkommt, wenn man setzt:

$$p = U e^{-\alpha t}, \quad \dots \quad (391)$$

worin U eine Funktion des Ortes und der Zeit ist. Hiernach wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} e^{-\alpha t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial t} e^{-\alpha t} - \alpha U e^{-\alpha t} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} e^{-\alpha t} - 2\alpha \frac{\partial U}{\partial t} e^{-\alpha t} + \alpha^2 U e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

und hiermit wird Gl. 389

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= U [RA - \alpha(CR + LA) + \alpha^2 LC] \\ &+ \frac{\partial U}{\partial t} [CR + LA - 2\alpha LC] + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} LC \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (389a)$$

Hierin wird der Faktor von $\frac{\partial U}{\partial t}$ Null, wenn

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right] \quad \dots \quad (392)$$

ist, der Faktor von U ist dann

$$RA - \alpha(CR + LA) + \alpha^2 LC = -LC \frac{1}{4} \left[\frac{R}{L} - \frac{A}{C} \right]^2 = -LC \delta^2,$$

worin

$$\delta = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{L} - \frac{A}{C} \right] \quad \dots \quad (393)$$

ist. Gl. 389a erhält hiermit die Form

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} LC - U \delta^2 LC \quad \dots \quad (389b)$$

Da unsere Rechnung bezüglich der Verluste nur eine Annäherung ist, so beschränken wir uns von vornherein auf den für Starkstromleitungen nicht sehr von der Wirklichkeit abweichenden Fall, daß $\delta = 0$ ist, oder nach (393)

$$R:L = A:C \quad \dots \quad (394)$$

d. i. nach Kap. XI S. 198 die verzerrungsfreie Leitung.

Dann lautet Gl. 389b

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} LC,$$

und mit der Abkürzung

$$LC = \frac{1}{v^2} \dots \dots \dots (395)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \dots \dots \dots (396)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist von d'Alembert für die schwingende Saite angegeben, sie lautet allgemein

$$U = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)^1), \dots \dots (397)$$

worin f_1 und f_2 vorläufig noch willkürliche Funktionen des Ortes und der Zeit sind, die noch näher zu bestimmen sind.

Hiermit wird nach Gl. 391

$$p = e^{-\alpha t} [f_1(x - vt) + f_2(x + vt)] \dots \dots (398)$$

Setzen wir diesen Wert in Gl. 388 ein, so wird

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = A e^{-\alpha t} (f_1 + f_2) - \alpha C e^{-\alpha t} (f_1 + f_2) + C e^{-\alpha t} \left[-v \frac{\partial f_1}{\partial x} + v \frac{\partial f_2}{\partial x} \right]$$

Für die Annahme (394) $\delta = 0$, sind die ersten beiden Glieder rechts entgegengesetzt gleich und heben sich fort; setzt man im dritten Glied den Wert für v aus (395) ein, so wird mit

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\alpha t} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)] \dots \dots (399)$$

Die beiden willkürlichen Funktionen f_1 und f_2 stellen zwei mit der konstanten Geschwindigkeit v fortschreitende Wellen von unveränderter Gestalt dar. f_1 wandert in Richtung der zunehmenden x denn die Funktion hat nach einer Zeit dt an einer um $dx = vdt$ entfernten Stelle wieder die gleichen Werte wie z. Z. t an der Stelle x , das gleiche gilt für f_2 , wenn wir sie um $-dx = vdt$ verschieben.

Nach Gl. 398 und 399 ergibt sich die Spannung als Summe, der Strom als Differenz von zwei in entgegengesetzter Richtung mit konstanter Geschwindigkeit wandernden Wellen, die bei der Fortpflanzung ihre Gestalt nicht ändern, aber, wie der Faktor $e^{-\alpha t}$ zeigt, mit der Zeit abklingen. Jede Welle des Stromes ist der im gleichen Sinne wandernden Spannungswelle proportional, sie ergibt

¹⁾ Man kann die Richtigkeit der Lösung durch Differentiation jeder der beiden Funktionen erkennen. Es ist z. B. für f_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f_1(x - vt)}{\partial (x - vt)^2} = f_1''(x - vt) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 f_1(x - vt)}{\partial (x - vt)^2} \left(\frac{d(x - vt)}{dt} \right)^2 = v^2 f_1''(x - vt), \end{aligned}$$

und analog für f_2 .

sich aus ihr durch Multiplikation mit $\sqrt{\frac{C}{L}}$, d. h. mit dem reziproken Wert der Charakteristik oder des Wellenwiderstandes (s. S. 198)

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Jeder elektrische Vorgang auf der Leitung läßt sich durch zwei derartige Wellen darstellen; ihre Form ergibt sich aus den Grenzbedingungen des Problems. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

worin $c = 3 \cdot 10^5$ km/sek⁻¹ die Lichtgeschwindigkeit ist. Bei Freileitungen ($\epsilon = 1, \mu = 1$) ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit, bei Kabeln ist sie umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstante.

Der Zustand auf einer Leitung während eines Ausgleichsvorganges ergibt sich wieder durch Zusammensetzung der stationären Werte (p_e, i_e) und der freien Schwingungen (p_f, i_f) von Strom und Spannung, die den Übergang von dem Anfangswert zum Endwert vermitteln

$$p = p_e + p_f; \quad i = i_e + i_f \quad \dots \quad (400)$$

Sind im Augenblick der Zustandsänderung ($t = 0$) die stationären Anfangswerte $p_{a(0)}, i_{a(0)}$, die stationären Endwerte $p_{e(0)}, i_{e(0)}$, so erfordert der stetige Übergang für die freien Schwingungen $p_{f(0)}, i_{f(0)}$

$$p_{a(0)} = p_{e(0)} + p_{f(0)}; \quad i_{a(0)} = i_{e(0)} + i_{f(0)} \quad \dots \quad (401)$$

92. Freie Schwingungen bei offener oder bei kurzgeschlossener Leitung.

1. Das Einschalten einer offenen Leitung mit Gleichstrom.

Eine Leitung von der Länge l werde zur Zeit $t = 0$ an ihrem Anfang ($x = 0$) an eine Quelle konstanter Spannung P geschaltet, während ihr Ende ($x = l$) offen ist. Wir sehen zunächst von der Rückwirkung der Einschaltvorgänge auf die Stromquelle ab¹⁾. Vor der Zeit $t = 0$ ist der Anfangszustand für die ganze Leitung

$$p_a = 0, \quad i_a = 0 \quad \dots \quad (402)$$

der stationäre Endzustand ist

$$p_e = P, \quad i_e = 0 \quad \dots \quad (403)$$

¹⁾ Eine beliebige Stromquelle würde bei dem auftretenden Ladestrom ihre Spannung nicht halten, man kann sich aber vorstellen, daß durch große parallelgeschaltete Kondensatoren die Ladung abgegeben und die Spannung praktisch konstant gehalten wird (s. auch S. 326).

Die Anfangsbedingungen für die freie Schwingung sind daher

$$\left. \begin{aligned} p_f(0) &= p_a(0) - p_e(0) = -P \\ i_f(0) &= i_a(0) - i_e(0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (404)$$

Diese Bedingungen setzen wir in die Gl. 398 und 399

$$\begin{aligned} p_f &= e^{-\alpha t} [f_1(x - vt) + f_2(x + vt)] \\ i_f &= \frac{e^{-\alpha t}}{Z} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)] \end{aligned}$$

für $t=0$ ein, und es ergibt sich

$$f_1(x) + f_2(x) = -P, \quad f_1(x) - f_2(x) = 0,$$

$$\text{daher} \quad f_1(x) = f_2(x) = -\frac{1}{2}P \quad \dots \dots \dots (405)$$

Die Wellen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind ihrem Betrag nach gleich groß, und haben zur Zeit $t=0$ über die ganze Leitungslänge den konstanten Wert $-\frac{1}{2}P$ (s. Fig. 205a).

Welche Gestalt haben nun die Wellen in den folgenden Zeiten während ihres Fortschreitens? Hierüber gibt uns die Reflexion an den Leitungsenden Aufschluß, die aus den dort herrschenden Bedingungen zu ermitteln ist.

a) Am Leitungsanfang soll nach Voraussetzung $P = \text{konst.}$, d. h. $p_f = 0$ sein, also ist nach Gl. 398 für $x=0$

$$f_1(0 - vt) = -f_2(0 + vt).$$

Dies bedeutet: die vom Anfang fortziehende Welle (f_1) ist am Leitungsanfang ebenso groß wie die einfallende f_2 , hat aber entgegengesetztes Vorzeichen. Man betrachtet die Fortsetzung der vom Anfang fortziehenden Welle f_1 als Reflexion der dort einfallenden Welle f_2 und erhält: Die einfallende Welle f_2 wird am Leitungsanfang unter Umkehrung des Vorzeichens reflektiert.

b) Das Leitungsende ist offen, dort ist $i_f = 0$, und nach Gl. 399 wird für $x=l$

$$f_1(l - vt) = f_2(l + vt),$$

was wir wieder so deuten, daß die am offenen Ende einfallende Welle f_1 mit gleichem Vorzeichen reflektiert wird. Fig. 205b zeigt

die beiden Wellen, nachdem sie um eine Strecke x in der Zeit $t = \frac{x}{v}$ gewandert sind, wobei von ihrer Verkleinerung durch die Dämpfung vorerst abgesehen ist. Die Welle f_1 zeigt an der Stelle x einen Sprung um die volle Spannung P , der von der Reflexion der Welle f_2 am Anfang herrührt. Unter Berücksichtigung der Dämpfung ist er $Pe^{-\alpha \frac{x}{v}}$.

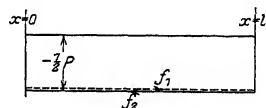


Fig. 205a.

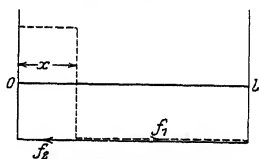
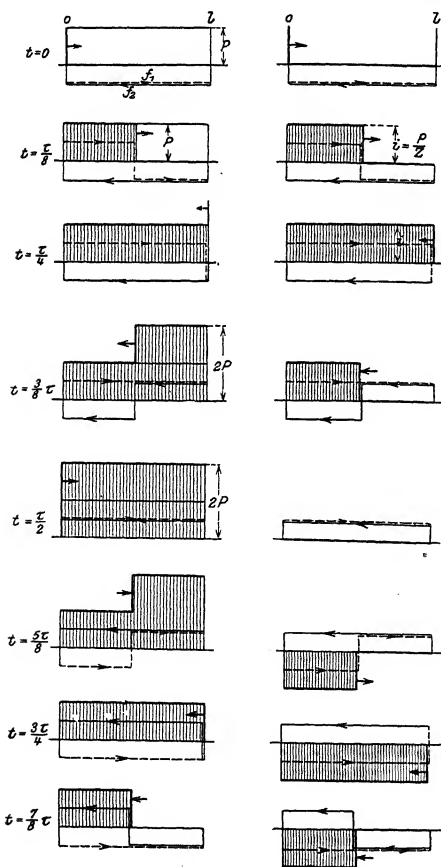


Fig. 205b.

Dieses Bild schreitet nun bis zur Zeit $t_1 = \frac{l}{v}$ vorwärts, dann hat der Spannungssprung der Welle f_1 das Leitungsende erreicht, und da f_1 hier mit gleichem Vorzeichen reflektiert wird, hat nun von hier ab auch f_2 einen analogen Spannungssprung, der nach dem Leitungsanfang wandert und diesen zur Zeit $t_2 = \frac{2l}{v}$ erreicht. Man erkennt, daß jede Welle ihr Vorzeichen nach dem zweimaligen Durchlaufen der Leitungslänge umkehrt. Die volle Periode des Vorgangs, die zwei entgegengesetzte Richtungswechsel in jeder Welle umfaßt, ist doppelt so groß, nämlich

$$\tau = \frac{4l}{v} \dots \dots \dots (406)$$

Eine einseitig offene Leitung schwingt in Viertelwellenlängen. Die resultierenden Werte von Strom und Spannung der Leitung ergeben sich nun durch Addition der stationären und der freien Werte:



Spannung.

Strom.

Fig. 206.

$$p = P + p_f, \quad i = i_f.$$

In Fig. 206 ist der Vorgang für 8 Augenblicke im Abstand von $\frac{1}{8}$ Periode unter Vernachlässigung der Dämpfung aufgetragen. In der ersten Viertelperiode wandert eine resultierende Spannungswelle von der Höhe P und ein Ladestrom $i = \frac{P}{Z}$ bis zum Ende der Leitung und speichern in dem elektromagnetischen Felde der Leitung gleichgroße elektrische und magnetische Energien

$$W_e = \frac{1}{2} P^2 Cl = W_m = \frac{1}{2} i^2 Ll$$

auf. Die Gleichheit folgt

$$\text{daraus, daß } i = P \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ ist.}$$

Die Stromquelle führt die momentane Leistung $Pi = \frac{P^2}{Z}$ zu. Am offenen Leitungsende kann der Strom nicht be-

stehen, die Stromwelle wandert in der zweiten Viertelperiode zurück, wobei das magnetische Feld seine Energie in das elektrische Feld entladet, während gleichzeitig die Stromquelle ihre konstante Leistung weiter liefert. Diese wird nun aber nur in dem elektrischen Felde der Leitung aufgespeichert, wobei die Spannung der Leitung zunächst am Ende und dann rückwärts schreitend bis zum Anfang auf den doppelten Betrag steigt, und am Ende der zweiten Viertelperiode ist in der Leitung die 4fache elektrische Energie aufgespeichert wie zuvor. Da am Leitungsanfang die Spannung konstant gehalten wird, entladet sich die Leitung in der dritten Viertelperiode in die Stromquelle zurück, der Entladestrom wandert vom Anfang der Leitung zum Ende unter Ausbildung eines magnetischen Feldes von entgegengesetzter Richtung wie zuvor, dessen Energie ebenfalls aus dem elektrischen Felde kommt, wobei die Spannung auf P abnimmt. In der vierten Viertelperiode entladen sich die magnetischen und elektrischen Felder der Leitung in die Stromquelle, und am Ende der Periode ist die Leitung strom- und spannungslos.

Das Spiel wiederholt sich von neuem, jedoch werden durch die Verluste die Wellen gedämpft und klingen aus, bis schließlich die Leitung die konstante Spannung P hat.

Der Einfluß der Dämpfung äußert sich zunächst darin, daß die größte Spannung, die zuerst am Leitungsende nach $1/4$ Periode auftritt, nicht $2P$ sondern $P\left(1 + e^{-\alpha \frac{l}{v}}\right)$ ist.

Quantitativ ist die Dämpfung schwer einzuschätzen, da es fraglich ist, welcher Wert des Widerstandes für diese hohen Frequenzen einzusetzen ist, und weil unsere Annahme der Verzerrungsfreiheit nicht immer zutrifft. Setzt man für R den Gleichstromwiderstand ein, so findet man für Freileitungen den Wert $\alpha = R:L$ zwischen 150 und 250. Für einen Mittelwert $\alpha = 200$ ist bei einer Leitung von $l = 15$ km mit $v = 3 \cdot 10^5$ km · sek⁻¹

$$e^{-\alpha \frac{l}{v}} = e^{-0.01} \cong 0,99.$$

Bei Kabeln ist die Dämpfung größer wegen der kleinen Induktivität und weil v kleiner ist. Schätzen wir α 5mal so groß und v halb so groß wie oben, so wird für ein ebenso langes Kabel

$$e^{-\alpha \frac{l}{v}} = e^{-0.1} = 0,905.$$

Die Spannung am Leitungsende wäre also in diesem Falle nach $1/4$ Periode $1,905P$; nach $3/4$ Perioden fällt sie dort nicht auf 0, sondern auf $P\left(1 - e^{-\alpha \frac{3l}{v}}\right) = P\left(1 - e^{-0.3}\right) = 0,26P$ usf.

Fig. 207 zeigt, wie unter Berücksichtigung der Dämpfung die Spannung sich am Leitungsende einschwingt und ein analoges Bild

läßt sich für jeden Punkt der Leitung konstruieren.

Für die Isolation muß man mit der doppelten Betriebsspannung rechnen.

2. Das Einschalten einer offenen Leitung mit Wechselstrom.

Aus Kap. XI ist bekannt, daß im stationären Zustand sich eine Schwingung einstellt, die wir darstellen können durch

$$\left. \begin{aligned} p_{(e)} &= p_{m(x)} \sin(\omega t + \psi_{(x)}) \\ i_{(e)} &= i_{m(x)} \sin(\omega t + \varphi_{(x)}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (407)$$

wobei die Amplituden $p_{m(x)}$ und $i_{m(x)}$ sowie die Phasenwinkel $\psi_{(x)}$ und $\varphi_{(x)}$ Funktionen des Ortes sind, die aus dem Spiralendiagramm Fig. 152 Seite 200 ermittelt werden. Fig. 149 Seite 192 stellte die Strom- und Spannungsverteilung für eine verlustfreie Leitung dar.

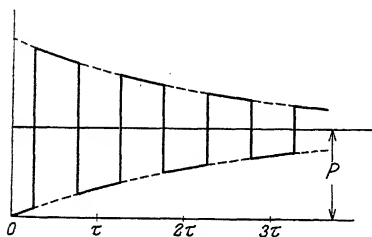


Fig. 207.

Schaltet man nun z. Z. $t=0$ den Anfang der Leitung an eine Spannung

$$p = p_m \sin(\omega t + \psi),$$

so ist der Anfangszustand vor Beginn der Zeitrechnung

$$p_a = 0, \quad i_a = 0;$$

der stationäre Endzustand für $t=0$ ist nach Gl. 407

$$p_{e(0)} = p_{m(x)} \sin \psi_{(x)}, \quad i_{e(0)} = i_{m(x)} \sin \varphi_{(x)},$$

daher für die freie Schwingung für $t=0$

$$\begin{aligned} p_{f(0)} &= -p_{e(0)} = -p_{m(x)} \sin \psi_{(x)} = f_1(x) + f_2(x) \\ i_{f(0)} &= -i_{e(0)} = -i_{m(x)} \sin \varphi_{(x)} = \frac{1}{Z} [f_1(x) - f_2(x)] \end{aligned}$$

und die beiden Wellen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind z. Z. $t=0$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\frac{1}{2} [p_{m(x)} \sin \psi_{(x)} + Z i_{m(x)} \sin \varphi_{(x)}] \\ f_2(x) &= -\frac{1}{2} [p_{m(x)} \sin \psi_{(x)} - Z i_{m(x)} \sin \varphi_{(x)}]. \end{aligned}$$

Die Form der beiden Wellen f_1 und f_2 ergibt sich hiernach durch Addition bzw. Subtraktion der stationären Strom- und Spannungsverteilung z. Z. $t=0$. Praktisch erfolgt das Einschalten stets durch einen Einschaltfunken im Augenblick der Spannungsamplitude.

Für die Reflexion der Wellen ergibt sich wieder bei der am Ende offenen Leitung

$$\text{für } x=0, \quad p_f=0, \quad \text{für } x=l, \quad i_f=0.$$

Die erste Bedingung ergibt wieder eine Reflexion der am Leitungsanfang eintreffenden Welle f_2 mit umgekehrtem Vorzeichen,

die zweite eine Reflexion der am Leitungsende eintreffenden Welle f_1 mit gleichem Vorzeichen.

Das Bild des Einschaltvorganges hängt nun sehr von dem Verhältnis der erzwungenen Frequenz f zur Eigenfrequenz f_{ei} der Leitung ab. Diese ist nach Gl. 406

$$f_{ei} = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{4l}.$$

Wir wählen zunächst ein Beispiel, bei dem die erzwungene Frequenz größer als die Eigenfrequenz ist. Es sei $f=300$, $l=500$ km.

Für eine Doppelleitung aus Drähten mit 1 cm Durchmesser im Abstand von 120 cm ist $C=0,00525 \mu F \cdot km^{-1}$.

$$L=0,00212 \text{ Henry} \cdot km^{-1}. \quad R=0,51 \text{ Ohm} \cdot km^{-1}.$$

Die Charakteristik ist $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = 635 \text{ Ohm}$.

Die Länge von 500 km ist bei 300 Perioden gleich der halben Wellenlänge, bei Leerlauf sind daher die Spannungen am Anfang und Ende im stationären Zustand um 180° phasenverschoben. Für die freien Schwingungen der offenen Leitung ist die Leitung $\frac{1}{4}$ der Wellenlänge. Die erzwungene Frequenz (300) ist daher hier doppelt so groß wie die Eigenfrequenz.

Zwischen dem räumlichen Dämpfungsfaktor der stationären Wellen der verzerrungsfreien Leitung (s. Kap. XI S. 198)

$$a = R : Z = A : Z$$

und dem zeitlichen Dämpfungsfaktor der freien Schwingungen

$$\alpha = R : L = A : C$$

besteht die Beziehung $\alpha = av$.

Hier ist

$$a = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \alpha = 240 \text{ sek}^{-1}.$$

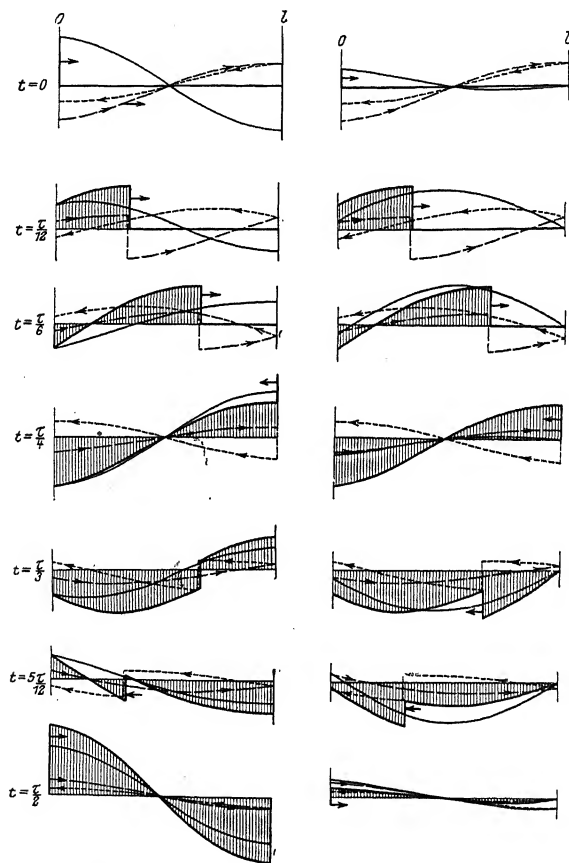
Fig. 208 zeigt für 7 Augenblicke der ersten Periode der erzwungenen, d. i. die erste Halbperiode der freien Schwingungen die Spannungs- und Stromverteilung. Die dünn ausgezogenen Linien sind die stationären Werte, die aus dem Spiralendiagramm Kap. XI ermittelt sind, die gestrichelten Linien sind die Welle f_1 und die punktierten die Welle f_2 . Die Dämpfung kann hier nicht vernachlässigt werden, denn nach $\frac{1}{2}$ Periode sind die Wellen schon auf den

Wert $e^{-\frac{\alpha l}{v}} = e^{-0,8} = 0,449$ gedämpft und in der Figur entsprechend verkleinert.

Bei den meisten Starkstromanlagen nähern sich die Vorgänge indessen wesentlich mehr denen einer Gleichstromleitung. Für eine Freileitung von 30 km Länge und $f=50$ Perioden i. d. Sek. ist die Leitungslänge $\frac{1}{200}$ der Wellenlänge und daher ist die stationäre

Spannung bei Leerlauf auf der ganzen Leitung in jedem Augenblick fast dieselbe.

Ferner ist $f = 0,02 f_{ei}$, d. h. die Eigenfrequenz ist 50 mal so groß wie die stationäre Frequenz. Wird z. B. bei der Amplitude der stationären Spannung eingeschaltet, so ist die stationäre Spannung nach 1 Periode der freien Schwingung $p_m \cos \frac{2\pi}{50} = 0,992 p_m$, also praktisch unverändert.



Spannung. Fig. 208. Strom.

Nehmen wir dieselben Leitungskonstanten wie vorhin an, so sind die freien Schwingungen nach 1 Periode der stationären Schwingung ($1/50$ Sek.) nur noch $e^{-4,3} = 0,0081$, d. h. weniger als 1% ihres Anfangswertes, so daß der Ausgleichsvorgang praktisch aufgehört hat.

Aus diesem Grunde legt man für die Einschaltvorgänge bei Starkstromanlagen meist die Verhältnisse zugrunde, wie sie sich für eine Gleichstromleitung ergeben.

3. Der Ausgleich einer beliebig verteilten Ladung auf einer offenen Leitung.

Bei einer atmosphärischen Entladung wird auf der Leitung eine zuvor durch die Ladung einer Wolke gebundene Ladung frei. Ihre Verteilung über die Länge l kann beliebig gegeben sein. Ist $q(x)$ die Ladung für die Längeneinheit, die eine beliebige Funktion von x sein kann, so entspricht ihr die Spannungsverteilung

$$p_a = p(x) = \frac{q(x)}{C}$$

und eine entsprechende Verteilung von elektrischer Energie.

Die Spannung sucht sich auf der Leitung auszugleichen. Da die Leitung an beiden Enden offen ist, kann die Energie an den Enden nicht abfließen, vielmehr wandert sie so lange auf der Leitung hin und her, bis sie in Verlusten verbraucht ist. Bei jeder Wanderung nimmt die ursprüngliche Ladung infolge der Ableitung ab. Dann ist $p_e = 0$. Der Strom ist zu Anfang und zu Ende des Vorgangs Null. Für die freien Schwingungen gilt

$$\begin{aligned} p_f(0) &= p_a(0) - p_e(0) = p(x) \\ i_f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Für die entstehenden Wellen gilt daher z. Z. $t = 0$

$$\begin{aligned} p_f(0) &= f_1(x) + f_2(x) = p(x) \\ i_f(0) &= \frac{1}{Z} [f_1(x) - f_2(x)] = 0, \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2} p(x) \quad \dots \dots \dots (408)$$

Die ursprünglich vorhandene, ganz willkürliche Spannungsverteilung zieht also in zwei Wellen von gleicher Form und je halber Größe nach den Enden der Leitung. Dort werden die Wellen, da die Enden offen sind, mit gleichem Vorzeichen reflektiert, weil die Ströme $\frac{f_1}{Z}$ und $\frac{f_2}{Z}$, die bei der Bewegung entstehen, an den offenen Leitungsenden nicht bestehen können. Die Wellen wandern somit auf der Leitung hin und her, bis ihre Energie durch die Verluste aufgebraucht ist, sofern sie sich nicht schon vorher einen Weg zur Ableitung der Energie schaffen. Ist nämlich die durch atmosphärische Entladungen entstehende Spannung höher als die Isolation der Leitungen verträgt, so wird die Isolation durchschlagen. Bei Freileitungen sind z. B. die Isolatoren die gefährdeten Stellen, die bei atmosphärischen Überspannungen überschlagen werden. Zum Schutz verwendet man sog. Überspannungsableiter, die häufig aus einer Funkenstrecke (Hörnerableiter) oder einer Anzahl in Reihe geschalteter Funkenstrecken (Rollenableiter) bestehen und mit einem

Widerstand zwischen Leitung und Erde geschaltet sind. Die Funkenstrecken werden so eingestellt, daß sie bei einer gewissen Überschreitung der Betriebsspannung ansprechen.

4. Die Ausgleichsvorgänge bei Unterbrechung eines Kurzschlusses.

Beim Kurzschluß einer Leitung wird der Leitungsanfang durch eine Sicherung oder einen selbsttätigen Schalter von der Stromquelle getrennt. Es werde angenommen, daß beim Abreißen des Unterbrechungslichtbogens ($t=0$) in der am Ende kurzgeschlossenen Leitung noch ein gewisser Strom $i_{a(0)}=J$ besteht, der für die ganze Länge l gleichgroß sei. Die Spannung der kurzgeschlossenen Leitung ist nach dem Abtrennen klein und werde vernachlässigt, daher $p_{a(0)}=0$.

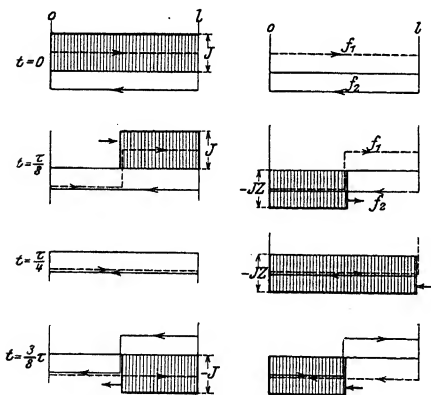
In der Leitung besteht eine magnetische Energie $\frac{1}{2}J^2Ll$, die auf der Leitung hin und her wandert, bis sie durch die Verluste in Wärme umgewandelt ist. Der Endzustand ist $p_e=0$, $i_e=0$, daher gilt für die freien Schwingungen

$$p_{f(0)} = f_1(x) + f_2(x) = 0$$

$$i_{f(0)} = \frac{1}{Z} [f_1(x) - f_2(x)] = J,$$

$$f_1(x) = -f_2(x) = \frac{1}{2}JZ.$$

Der Vorgang ist in Fig. 209 für einige Augenblicke in Abständen von je $\frac{1}{8}$ Periode dargestellt. Zur Zeit $t=0$ sind die beiden



Strom. Fig. 209. Spannung.

Wellen $\frac{1}{2}JZ$ und $-\frac{1}{2}JZ$; die zweite wird am offenen Leitungsanfang, wo der Strom Null ist, mit gleichem Vorzeichen reflektiert, während f_1 am kurzgeschlossenen Ende, wo die Spannung Null ist, mit entgegengesetztem Vorzeichen reflektiert wird.

Der Strom verschwindet daher vom Anfang der Leitung anfangend, während er seine magnetische Energie in das elektrische Feld der Leitung entladet, so daß eine

Spannungswelle von der Höhe $-JZ$ über die Leitung wandert.

Erreicht sie das Ende der Leitung nach $\frac{1}{4}$ Periode, so wird sie zurückgeworfen, da dort die Spannung Null sein muß. Das elektrische Feld entladet sich wieder unter Ausbildung eines magnetischen Feldes, die Entladestromwelle von der Höhe $-J$ wandert

zum Anfang zurück, sie wird dort nach Ablauf der zweiten Viertelperiode zurückgeworfen, wobei das magnetische Feld sich wieder in das elektrische entladet, das aber nun ebenfalls die umgekehrte Richtung hat wie zuvor, und so geht der Wechsel der Energie fort, bis die ganze Energie in Verlusten aufgezehrt ist.

Die größte Spannung, die z. Z. $t=0$ am Leitungsanfang entsteht, ist JZ . Die Größe des Anfangsstromes J , der nach dem Abreißen des Unterbrechungslichtbogens noch besteht, ist jedenfalls klein, daher darf die Unterbrechungsüberspannung nicht überschätzt werden. Am häufigsten kann das Abreißen des Lichtbogens bei Gleichstromschaltern und Sicherungen beobachtet werden. Bei einem Wechselstromschalter, bei dem der Lichtbogen im natürlichen Nulldurchgang des Stromes erlischt, kann sie überhaupt nicht auftreten.

Ist für eine Gleichstromleitung von 500 Volt der Kurzschlußstrom einige Tausend Ampere und der abgerissene Strom etwa 10 Ampere, so sieht man, daß die Überspannung 5 bis 6000 Volt, also das Zehnfache der Betriebsspannung betragen kann. Je kürzer die Leitung, um so weniger sind die Wellen bei wiederholtem Eintreffen gedämpft und verursachen Überschläge am Schalter.

5. Das Einschalten einer kurzgeschlossenen Leitung.

Beim Einschalten einer am Ende kurzgeschlossen Leitung stellt sich als Endwert eine Spannungsverteilung ein, die etwa linear vom Anfang bis zum Ende abnimmt, während der Strom für die Länge konstant und (bei Gleichstrom) durch den Leitungswiderstand begrenzt ist

$$p_{e(0)} = P \left(1 - \frac{x}{l} \right), \quad i_{e(0)} = \frac{P}{Rl}.$$

Da die Anfangswerte Null sind, erhält man

$$\begin{aligned} p_{f(0)} &= f_1(x) + f_2(x) = -P \left(1 - \frac{x}{l} \right) \\ i_{f(0)} &= \frac{1}{Z} [f_1(x) - f_2(x)] = -\frac{P}{Rl} \\ f_1(x) &= -\frac{1}{2} P \left[\frac{Z}{Rl} + 1 - \frac{x}{l} \right], \quad f_2(x) = \frac{1}{2} P \left[\frac{Z}{Rl} - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Der Schwingungsvorgang, dessen Darstellung nach dem Vorhergehenden leicht zu ermitteln ist, und die wir daher übergehen, bietet nur insofern etwas Neues, als hier die Reflexion an beiden Enden mit umgekehrtem Vorzeichen erfolgt, weil sowohl am Anfang, wo die Spannung konstant gehalten wird, als auch am Ende, wo sie Null ist, die Summe der beiden Wellen Null sein muß. Hieraus folgt, daß ein Richtungswechsel nach jedem Durchlaufen der Leitungslänge

erfolgt und die ganze Periode der Laufzeit über zwei Leitungslängen entspricht, die Periode ist hier

$$\tau = \frac{2l}{v}.$$

Im Gegensatz zur offenen Leitung schwingt die an einem Ende erregte, am anderen kurzgeschlossene Leitung in Halbwellenschwingungen, da der konstant erregte Anfang und das kurzgeschlossene Ende Spannungsknoten der freien Schwingung sind.

Die Einschaltwelle P läuft hier nach dem Ende und zurück, hiermit ist eine Periode beendet.

Es geht hieraus hervor, daß die Frequenz der freien Schwingungen nicht allein von der Leitungslänge, sondern auch wesentlich von den Bedingungen an den Enden abhängt.

93. Reflexion der Wellen an Widerstand, Induktivität und Kapazität.

Wir erweitern nun die Betrachtung auf andere Grenzbedingungen und untersuchen zunächst die Reflexion der Wellen an Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten.

Die Trennung dieser Größen bei nicht stationären Vorgängen ist nicht streng, sie setzt Anordnungen voraus, bei denen die eine Größe die anderen derart überwiegt, daß diese für eine angenäherte Betrachtung vernachlässigt werden können.

Als reiner Widerstand kann ein Wasser- oder Kohlewiderstand gelten, der in Verbindung mit Überspannungsableitern, z. B. Hörnerfunkenstrecken, verwendet wird. Er hat bei sehr geringer Länge einen Widerstand von mehreren Hundert Ohm, seine Induktivität und Kapazität sind dagegen verschwindend. Vorwiegend Induktivität haben kurze Spulen, Stromwandler, Auslösemagnete, während vorwiegend Kapazität in Sammelschienen, Schutzkondensatoren usw. vorhanden ist. Maschinenwicklungen, auch größere Drosselspulen, haben verteilte Kapazität und Selbstinduktion; in der Rückwirkung einer solchen Wicklung auf die Wellenvorgänge in der Leitung betrachtet man sie oft in erster Annäherung auch als Induktivität.

Seien R_0 , L_0 , C_0 Widerstand, Induktivität und Kapazität, die am Leitungsende etwa in Reihe geschaltet sind, so gilt für das Leitungsende ($x=l$)

$$p = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt} + \int \frac{i dt}{C_0} \dots \dots \dots (409)$$

Hierin ist p die Summe aus der stationären Spannung p_s und der freien Spannung p_f , i die Summe aus dem stationären Strom i_s und der freien Schwingung i_f . Da die Gleichung linear ist, wird

sie von den stationären und von den freien Strömen und Spannungen je für sich erfüllt und kann in zwei Gleichungen geteilt werden, von denen die eine nur für die stationären, die andere nur für die freien Werte gilt, wie wir dies schon wiederholt getan haben.

Die freien Schwingungen können für die ganze Leitung durch zwei Wellen dargestellt werden

$$p_f = e^{-\alpha t} [f_1(x - vt) + f_2(x + vt)],$$

$$i_f = \frac{e^{-\alpha t}}{Z} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)].$$

Da es hier auf die Werte am Ende der Leitung ($x=l$) ankommt, setzen wir zur Abkürzung

$$f_1(l - vt) = \varphi \quad \text{und} \quad f_2(l + vt) = \varrho,$$

worin φ und ϱ nur von der Zeit abhängen, daher ist für $x=l$

$$\left. \begin{aligned} p_{f(x=l)} &= e^{-\alpha t} (\varphi + \varrho) \\ i_{f(x=l)} &= \frac{e^{-\alpha t}}{Z} (\varphi - \varrho) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (410)$$

Setzt man diese Werte in die Gl. 409 ein, so wird

$$e^{-\alpha t} (\varphi + \varrho) = \left[R_0 + L_0 \frac{d}{dt} + \int \frac{dt}{C_0} \right] \left[\frac{e^{-\alpha t}}{Z} (\varphi - \varrho) \right] \quad (411)$$

In dieser Gleichung ist die am Leitungsende einfallende Welle, d. h. φ , als bekannt vorauszusetzen, während die Werte ϱ der reflektierten Welle durch Lösung der Gleichung zu ermitteln sind, wie nun an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

a) Reflexion an einem Ohmschen Widerstand.

Ist an die Leitung nur ein Ohmscher Widerstand R_0 angeschlossen, so erhält man aus Gl. 411

$$e^{-\alpha t} (\varphi + \varrho) = \frac{R_0}{Z} e^{-\alpha t} (\varphi - \varrho),$$

$$\varrho = \varphi \frac{R_0 - Z}{R_0 + Z} = \varphi q \dots \dots \dots (412)$$

Die einfallende Welle φ wird am Ohmschen Widerstand unvollkommen reflektiert, sie erscheint nach Maßgabe des Reflexionsfaktors q verkleinert. Dieser ist

$$q = \frac{R_0 - Z}{R_0 + Z}.$$

Die resultierenden Werte von Spannung und Strom am Leitungsende sind

$$p = p_e + e^{-\alpha t} (\varphi + \varrho) = p_e + e^{-\alpha t} \varphi (1 + q),$$

$$i = i_e + \frac{e^{-\alpha t}}{Z} (\varphi - \varrho) = i_e + \frac{e^{-\alpha t} \varphi}{Z} (1 - q).$$

Die einfallende Welle führt in jedem Augenblick eine Leistung $\frac{\varphi^2}{Z}$ mit sich; die reflektierte die Leistung $\frac{\varphi^2}{Z} = \frac{(q\varphi)^2}{Z}$. Die Differenz ist die im Widerstand verzehrte Leistung

$$\frac{\varphi^2}{Z} (1 - q^2).$$

Ist $R_0 = Z$, so wird die reflektierte Welle Null, die ganze Leistung der ankommenden Welle wird vom Widerstand absorbiert. Ist $R_0 \geq Z$, so ist die im Widerstand verzehrte Leistung stets kleiner als die der einfallenden Welle. Für $R > Z$ hat die reflektierte Welle das gleiche, für $R < Z$ das entgegengesetzte Vorzeichen der ankommenden.

Die Grenzen sind: 1. $R_0 = \infty$, d. h. die Leitung ist offen, es wird $q = 1$, die einfallende Welle wird in voller Größe reflektiert. 2. $R_0 = 0$, die Leitung ist kurzgeschlossen, $q = -1$, die Welle wird unter Umkehr des Vorzeichens reflektiert, wie früher gezeigt.

Beispiel. Eine am Anfang offene Leitung erhält eine Ladung

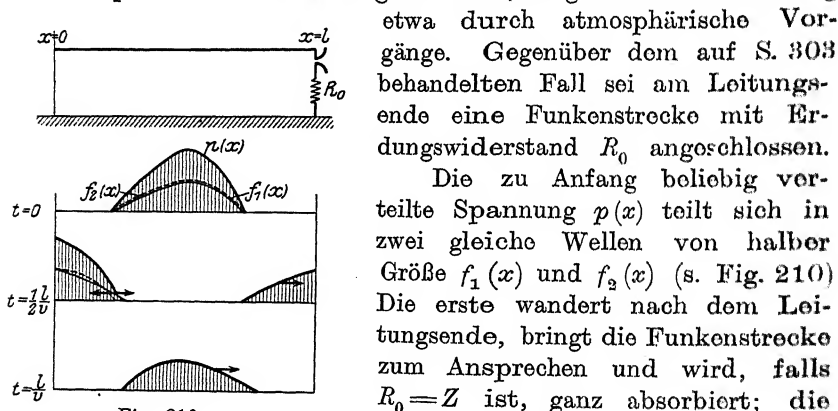


Fig. 210.

etwa durch atmosphärische Vorgänge. Gegenüber dem auf S. 303 behandelten Fall sei am Leitungsende eine Funkenstrecke mit Erdungswiderstand R_0 angeschlossen.

Die zu Anfang beliebig verteilte Spannung $p(x)$ teilt sich in zwei gleiche Wellen von halber Größe $f_1(x)$ und $f_2(x)$ (s. Fig. 210). Die erste wandert nach dem Leitungsende, bringt die Funkenstrecke zum Ansprechen und wird, falls $R_0 = Z$ ist, ganz absorbiert; die andere wandert nach dem offenen Leitungsanfang, wird dort in voller

Stärke reflektiert und geht dann nach dem Ende, um ebenfalls absorbiert zu werden. Bei unvollkommener Absorption dauert der Vorgang länger. Am Leitungsende wird die einfallende Welle z. T. reflektiert und wandert zum Anfang zurück, wird beim zweiten Auftreffen auf das Leitungsende wieder geschwächt usw.

Sieht man von den Verlusten in der Leitung ab, so ist am Ende des Vorgangs die ganze ursprünglich in der Leitung vorhandene elektrische Energie in dem Widerstand R_0 in Wärme umgewandelt worden.

Die Möglichkeit, $R_0 = Z$ zu wählen, also bei Freileitungen etwa 600 Ohm, ist nur bis zu gewissen Betriebsspannungen gegeben. Steht das Netz unter Spannung, so folgt dem Ansprechen des Ableiters

ein Lichtbogen des Netzstromes, der beim Ansprechen in allen Phasen am größten wird und durch die Phasenspannung und den Erdungswiderstand gegeben ist. Bei zu großer Stromstärke besteht die Gefahr, daß der Lichtbogen nicht mehr erlischt. Bei 30 000 Volt verketteter Spannung und $R_0 = 600$ Ohm würde der Strom fast 30 Amp. betragen, während höchstens 10 Amp. zulässig wären. Man ist daher gezwungen, bei höheren Spannungen von der Bedingung der Reflexionsfreiheit abzuweichen, wodurch die Wirksamkeit der Ableiter beeinträchtigt wird. Ihr Schutzwert für Netze liegt jedoch nach Petersen¹⁾ in der Fähigkeit, die Ladungen abzuleiten, die beim Erlöschen eines Erdschlußlichtbogens auf dem Netz verbleiben, und dadurch das Wiederzünden zu erschweren.

b) Reflexion an einer Induktivität.

Ist am Ende der Leitung eine Induktivität L_0 angeschlossen, so lautet Gl. 411 für die freien Schwingungen

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}(\varphi + \varrho) &= \frac{L_0}{Z} \frac{de^{-\alpha t}(\varphi - \varrho)}{dt} \\ &= \frac{L_0}{Z} e^{-\alpha t} \left[-\alpha(\varphi - \varrho) + \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varrho}{dt} \right], \\ \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \left(\frac{Z}{L_0} - \alpha \right) &= -\varphi \left(\frac{Z}{L_0} + \alpha \right) + \frac{d\varphi}{dt} \quad \dots (413) \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist, wenn $\frac{Z}{L_0} \leq \alpha$

$$\varrho = e^{-\left(\frac{Z}{L_0} - \alpha\right)t} \left\{ k + \int e^{\left(\frac{Z}{L_0} - \alpha\right)t} \left[-\varphi \left(\frac{Z}{L_0} + \alpha \right) + \frac{d\varphi}{dt} \right] dt \right\} \quad (414)$$

und wenn $\frac{Z}{L_0} = \alpha$ ist

$$\varrho = \varphi - \int \varphi \left(\frac{Z}{L_0} + \alpha \right) dt + k,$$

worin k die Integrationskonstante ist.

Beispiel. Die freien Schwingungen beim Ausschalten einer induktiv belasteten Leitung.

Die Leitung werde z. Z. $t=0$ am Anfang $x=0$ unterbrochen. Zur Vereinfachung der Rechnung machen wir folgende Annahmen: der Strom habe auf der ganzen Leitung z. Z. $t=0$ denselben Wert J , die Spannung auf der Leitung werde vernachlässigt. Diese Annahmen, die annähernd beim Unterbrechen eines Gleichstromes zutreffen, würden auch für diesen bedingen, daß der Spannungsabfall in der Leitung und die Ableitung Null sind, und um die Rechnung mit diesen An-

nahmen nicht in Widerspruch zu bringen, müssen wir α in Gl. 414 vernachlässigen. Diese Annahme würde somit zutreffen für den Fall, daß α klein gegen $\frac{Z}{L_0}$ ist. Bei einer Freileitung ist Z etwa 600, α etwa 200. Ist $L_0 = 0,3$ Henry, so wird α in der Tat nur 10% von $\frac{Z}{L_0}$. Die Vereinfachung trifft also für nicht zu große Induktivitäten zu.

Als Grenzbedingungen haben wir nun

$$\begin{aligned} p_{a(0)} &= 0, \quad i_{a(0)} = J, \quad p_{e(0)} = 0, \quad i_{e(0)} = 0, \\ p_{f(0)} &= f_1(x) + f_2(x) = 0, \\ i_{f(0)} &= \frac{1}{Z} [f_1(x) - f_2(x)] = J, \end{aligned}$$

und hieraus für $t=0$ $f_1(x) = \frac{1}{2}JZ$, $f_2(x) = -\frac{1}{2}JZ$.

Die Reflexionsbedingungen sind: am Leitungsanfang Reflexion mit gleichen Vorzeichen, am Leitungsende nach Maßgabe der Gl. 414 die sich auf Grund unserer Annahme vereinfacht in

$$\varrho = e^{-\beta t} \left[k + \int e^{\beta t} \left(-\varphi \beta + \frac{d\varphi}{dt} \right) dt \right] \quad \dots (414a)$$

worin zur Abkürzung $\beta = \frac{Z}{L_0}$ gesetzt ist.

Die Werte φ sind zunächst von $t=0$ an durch die Welle $f_1(x) = \frac{1}{2}JZ$ gegeben. Die Welle gebraucht eine Zeit $t_1 = \frac{l}{v}$, um sich über die Leitung zu verschieben, von $t=0$ bis $t=t_1$ ist daher $\varphi = \frac{1}{2}JZ$.

In dieser Zeit wurde die nach dem Leitungsanfang wandernde Welle $f_2(x) = -\frac{1}{2}JZ$ dort mit gleichem Vorzeichen reflektiert und gelangt während der folgenden Zeit von $t=t_1$ bis $t=2t_1$ an das Leitungsende; für dieses Zeitintervall ist daher $\varphi = -\frac{1}{2}JZ$.

Man sieht, daß für die folgenden Zeiten jeder Wert φ der am Leitungsende einfallenden Welle gleich ist dem Wert ϱ der um $2t_1$ früher dort reflektierten Welle.

Für die Zeit $t=0$ bis $t=t_1$ wird aus Gl. 414a mit

$$\begin{aligned} \varphi(0 \div t_1) &= \frac{1}{2}JZ, \\ \varrho(0 \div t_1) &= k e^{-\beta t} - \frac{1}{2}JZ. \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante bestimmen wir aus der Bedingung der Stetigkeit des Stromes der Drosselspule. Er ist z. Z. $t=0$

$$i = i_e + \frac{\varphi - \varrho}{Z} = 0 + \frac{1}{2}J - \frac{k}{Z} + \frac{1}{2}J = J,$$

daher

$$k = 0$$

und

$$Q(0 \div t_1) = -\frac{1}{2} JZ.$$

Von t_1 bis $2t_1$ war wie gezeigt $\varphi(t_1 \div 2t_1) = -\frac{1}{2} JZ$, ferner wird von $2t_1$ bis $3t_1$

$$\varphi(2t_1 \div 3t_1) = Q(0 \div t_1) = -\frac{1}{2} JZ.$$

Daher insgesamt von t_1 bis $3t_1$

$$\varphi(t_1 \div 3t_1) = -\frac{1}{2} JZ$$

und durch Einsetzen in Gl. 414 a

$$Q(t_1 \div 3t_1) = k e^{-\beta t} + \frac{1}{2} JZ.$$

Für $t = t_1$ ist

$$iZ = (\varphi - Q) = -JZ - k e^{-\beta t_1} = JZ,$$

daher

$$k = -2JZ e^{+\beta t_1},$$

$$Q(t_1 \div 3t_1) = \frac{1}{2} JZ (1 - 4e^{-\beta(t-t_1)}).$$

Von $t = 3t_1$ bis $5t_1$ wird nun φ ebenso groß wie Q von t_1 bis $3t_1$, es ist daher in der Formel dafür statt t zu setzen $(t - 2t_1)$. Man erhält

$$\varphi(3t_1 \div 5t_1) = \frac{1}{2} JZ (1 - 4e^{-\beta(t-3t_1)})$$

und durch Einsetzen in Gl. 414 a und Integration

$$Q(3t_1 \div 5t_1) = \frac{1}{2} JZ [-1 - 4e^{-\beta(t-t_1)} + 8\beta(t-3t_1)e^{-\beta(t-3t_1)}].$$

Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man für jedes folgende Intervall in dem Ausdruck für Q je ein weiteres Glied, während das erste Glied in der Klammer abwechselnd $+1$ und -1 ist. Es wird

$$Q(5t_1 \div 7t_1) = Q(3t_1 \div 5t_1) + \frac{1}{2} JZ \{2 - 4e^{-\beta(t-5t_1)} [1 - 2\beta(t-5t_1) + 2\beta^2(t-5t_1)^2]\},$$

$$Q(7t_1 \div 9t_1) = Q(5t_1 \div 7t_1) - \frac{1}{2} JZ \{2 - 8e^{-\beta(t-7t_1)} [2\beta(t-7t_1) - 2\beta^2(t-7t_1)^2 + \frac{2}{3}\beta^3(t-7t_1)^3]\}$$

usf.

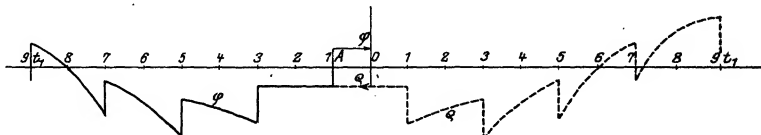


Fig. 211.

In Fig. 211 sind die Werte Q als Funktion der Zeit von O aus nach rechts als gestrichelter Kurvenzug, die Werte φ von O aus nach links als ausgezogene Kurve aufgetragen. Verschiebt man diese Wellenzüge gegeneinander, und zwar den für Q nach links, den für φ nach rechts, so erhält man als Ordinaten in O die Momentanwerte von φ und Q zu einer Zeit t , um deren Betrag man die Wellen verschoben hat.

In der Zeit t wandern die Wellen um die Strecke $x = vt$.

Man kann daher die Abszissen als Längen betrachten, dann entspricht Punkt A im Abstand $vt_1 = l$ von O im Sinne der Wanderung der am Ende reflektierten Welle dem Leitungsanfang.

Man erhält somit auch das zeitliche Bild an jedem Punkt der Leitung und für einen gegebenen Augenblick das Bild der räumlichen Verteilung der Wellen längs der Leitung, und kann nun in üblicher Weise die resultierende Strom- und Spannungsverteilung ermitteln, indem man die Welle mit e^{-at} multipliziert und zu den freien Schwingungen die stationären Werte addiert, die in unserem Beispiele Null sind.

Fig. 212 zeigt ohne Berücksichtigung der Dämpfung den zeitlichen Strom- und Spannungsverlauf am Ende der Leitung und Fig. 213 für einige Zeitpunkte die räumliche Verteilung von Strom und Spannung längs der Leitung, aus denen wir folgendes entnehmen. Da z. Z.

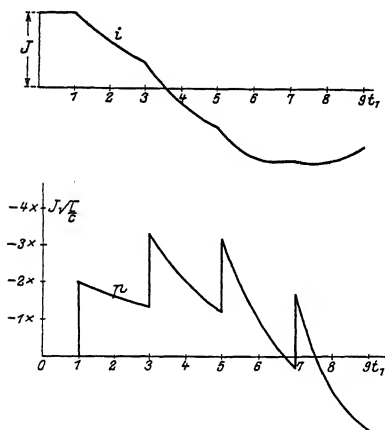


Fig. 212.

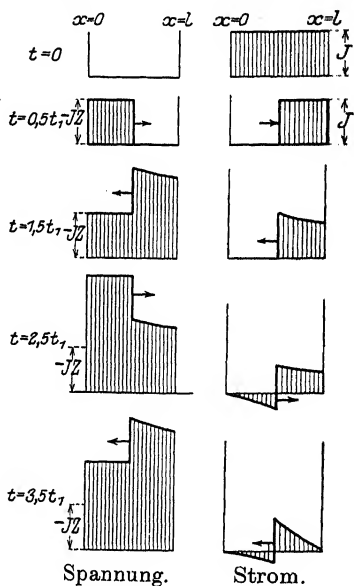


Fig. 213.

$t=0$ der Strom am Leitungsanfang unterbrochen ist, entladet sich das magnetische Feld der Leitung zunächst am Anfang und dann bis zum Ende fortschreitend unter Ausbildung eines elektrischen Feldes, wodurch eine Spannungswelle $-JZ$ nach dem Leitungsende wandert, während der Leitungsstrom auf Null fällt. Zur Zeit t_1 gelangt sie an das Leitungsende und wird an der Drosselspule zurückgeworfen. Diese beginnt sich zu entladen, jedoch sehr langsam. Sie erhöht zunächst die elektrische Energie unter Verdoppelung der Spannung auf $2JZ$, und mit dem Rückschreiten dieser Welle nach dem Anfang speichert sie durch den Ladestrom auch wieder magnetische Energie im Felde der Leitung auf. Die

mit dem Sprung JZ wandernde Spannungswelle behält aber nicht konstante Höhe, sondern wird am Ende der Leitung wegen der allmählichen Entladung der Drosselspule kleiner. Am Anfang angekommen, muß die magnetische Energie der Leitung sich dort wieder in elektrische Energie verwandeln. Die Spannungs- und Stromwellen laufen zurück. Ist nun die Energie der Drosselspule erschöpft, so können die ankommenden Wellen die Drosselspule wieder laden, jedoch im entgegengesetzten Sinne wie sie ursprünglich geladen war, es bildet sich also eine langsame Schwingung zwischen Leitung und Drosselspule aus, über die sich die Schwingungsvorgänge der Leitung lagern, wie aus Fig. 212 ersichtlich ist.

Die Spannung steigt jeweils nach $2t_1$ Sek. sprunghaft um $2JZ$. Um ein angenähertes Bild von der größten möglichen Spannung zu erhalten, nehmen wir als ungünstigsten Fall den an, daß bei Entladung der Drosselspule auch das magnetische Feld der Leitung entladen ist. Die Energie ist dann, abgesehen von der Dämpfung, im elektrischen Feld der Leitung aufgespeichert. Unter Vernachlässigung der ungleichen Verteilung von Strom und Spannung längs der Leitung wird

$$\frac{1}{2} p^2 Cl = \frac{1}{2} J^2 (Ll + L_0),$$

$$p = J \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{L_0}{Cl}} = JZ \sqrt{1 + \frac{L_0}{Ll}}.$$

Dies ist ein Mittelwert, gegen den die Spannung an der Drosselspule noch um den Sprung $2JZ$ größer sein kann. Der ungünstigste Fall wäre daher

$$p_{\max} = JZ \left(2 + \sqrt{1 + \frac{L_0}{Ll}} \right),$$

der wegen der Dämpfung aber nicht erreicht wird. Man sieht, daß die Spannung um so größer wird, je größer die Induktivität L_0 gegen die der ganzen Leitung ist. Über die Größe des Anfangsstromes J gilt das gleiche wie in dem Beispiel S. 304.

c) Reflexion an einem Kondensator.

Hier gilt für die freien Schwingungen nach Gl. 411

$$\frac{de^{-\alpha t}(\varphi + \varrho)}{dt} = \frac{e^{-\alpha t}}{C_0 Z}(\varphi - \varrho)$$

$$- \alpha(\varphi + \varrho) + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{C_0 Z}(\varphi - \varrho) \quad . \quad . \quad (415)$$

Beispiel. Das Unterbrechen eines Kurzschlusses, wenn parallel zum Schalter ein Kondensator liegt.

Am Ende $x=l$ sei die Leitung kurzgeschlossen, der Leitungs-

anfang werde z. Z. $t=0$ unterbrochen, es ist dort ein Kondensator C_0 zwischen die Leitung geschaltet (s. Fig. 214).

Für den Leitungsanfang ist ϱ der Wert der einfallenden Welle, φ der Wert der reflektierten Welle, es ist daher hier Gl. 415 nach φ zu lösen.

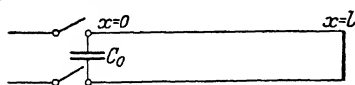


Fig. 214.

Da der Ladestrom des Kondensators ein Entladestrom der Leitung ist, ist in Gl. 415 rechts das negative Zeichen zu setzen, sie lautet

geordnet

$$\frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{1}{C_0 Z} - \alpha \right) \varphi = \varrho \left(\frac{1}{C_0 Z} + \alpha \right) - \frac{d\varrho}{dt}.$$

Auch hier kann man meist α gegen $\frac{1}{C_0 Z}$ vernachlässigen, und wenn wir

zur Abkürzung $\frac{1}{C_0 Z} = \gamma$ setzen, ist die Lösung der Gleichung

$$\varphi = e^{-\gamma t} \left[k + \int \left(\varrho \gamma - \frac{d\varrho}{dt} \right) e^{\gamma t} dt \right] \dots (416)$$

Für unser Beispiel nehmen wir wieder an, es sei

$$p_a = 0, \quad i_a = J, \quad p_e = 0, \quad i_e = 0,$$

so wird wieder für $t=0$

$$f_1(x) = -f_2(x) = \frac{1}{2} JZ.$$

Für die Reflexion am Leitungsanfang gilt Gl. 416, am kurzgeschlossenen Leitungsende wird die einfallende Welle mit umgekehrtem Vorzeichen reflektiert.

Am Leitungsanfang ist $\varrho_{(0 \div t_1)} = -\frac{1}{2} JZ$, und da $f_1(x - vt) = \frac{1}{2} JZ$ am Leitungsende mit umgekehrten Vorzeichen reflektiert wird, ist $\varphi_{(0 \div 2t_1)} = -\frac{1}{2} JZ$.

Hiermit erhält man aus Gl. 416

$$\varphi_{(0 \div 2t_1)} = k e^{-\gamma t} - \frac{1}{2} JZ.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten dient die Bedingung der Stetigkeit der Ladung bzw. der Spannung des Kondensators. Für $t=0$ ist

$$p_e + (\varphi + \varrho) = 0 + k - \frac{1}{2} JZ - \frac{1}{2} JZ = 0,$$

daher

$$k = JZ$$

$$\varphi_{(0 \div 2t_1)} = \frac{1}{2} JZ (-1 + 2e^{-\gamma t}).$$

Während des folgenden Intervalls $2t_1$ bis $4t_1$ wird daher

$$\varrho_{(2t_1 \div 4t_1)} = -\frac{1}{2} JZ \{-1 + 2e^{-\gamma(t-2t_1)}\}$$

und durch Einsetzen in Gl. 416 und Integration

$$\varphi_{(2t_1 \div 4t_1)} = \frac{1}{2} JZ \{+1 + 2e^{-\gamma t} - [2 + 4\gamma(t-2t_1)] e^{-\gamma(t-2t_1)}\}$$

dann

$$\begin{aligned} \varphi_{(4t_1 \div 6t_1)} = \frac{1}{2} JZ \{ & -1 + 2e^{-\gamma t} - [2 + 4\gamma(t-2t_1)] e^{-\gamma(t-2t_1)} \\ & + [2 + 4\gamma^2(t-4t_1)^2] e^{-\gamma(t-4t_1)} \} \end{aligned}$$

usf.

Fig. 215 zeigt für einige Augenblicke das allmähliche Ansteigen der Spannung längs der Leitung (ohne Berücksichtigung der Dämpfung) und das damit verbundene Abfallen des Stromes. Die magnetische Energie der Leitung entladet sich in den Kondensator und in das elektrische Feld der Leitung, nur am kurzgeschlossenen Leitungsende bleibt die Spannung Null. Ist das magnetische Feld der Leitung entladen, so ist nur elektrische Energie im Kondensator und in der Leitung vorhanden, und diese laden wieder das magnetische

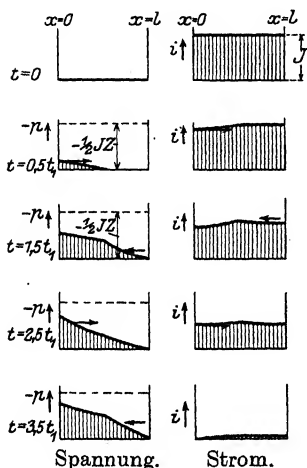


Fig. 215.

feld der Leitung in entgegengesetztem Sinn auf. Es bildet sich auch hier eine langsamere Schwingung aus, wie der zeitliche Verlauf der Spannung und des Stromes am Kondensator Fig. 216. zeigen, und die durch die Verluste gedämpft wird. Während beim Unterbrechen ohne Kondensator eine

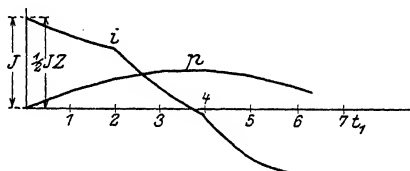


Fig. 216.

rechteckige Spannungswelle von der Höhe $-JZ$ in die Leitung wandert (s. S. 304), ist hier durch den Kondensator die resultierende Spannungswelle stark abgeflacht, weil er eine plötzliche Spannungsänderung nicht zuläßt. Die einziehende Welle ist am Beginn

$$(\varphi + \varrho)_{(0 \div 2t_l)} = -JZ \left(1 - e^{-\frac{1}{C_0 Z} t}\right).$$

Je größer C_0 ist, um so flacher bleibt die Welle. Die absolute Größe der am Leitungsanfang auftretenden Spannung kann aber nicht so sehr vermindert werden, wenn man nicht über sehr große Kondensatoren verfügt. Man kann diese Spannung wieder annähert daraus berechnen, daß man die elektrische Energie im Kondensator und der Leitung gleich der ursprünglichen magnetischen Energie der Leitung setzt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p_{\max}^2 (C_0 + Cl) &= \frac{1}{2} J^2 L l \\ p_{\max} &= J \sqrt{\frac{Ll}{C_0 + Cl}} = JZ \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{C_0}{Cl}}} \end{aligned}$$

Dieser Wert ist etwas zu klein, weil die Leitung nicht auf der ganzen Länge die gleiche Spannung hat; ist C_0 groß gegen die

Kapazität der ganzen Leitung Cl , so ist aber der Fehler sehr gering, andererseits verhindert die Dämpfung schon das Erreichen dieses Wertes. Um z. B. p_{max} auf $\frac{1}{3}$ des Wertes ohne Kondensator (JZ) zu reduzieren, muß

$$\sqrt{1 + \frac{C_0}{Cl}} = 3, \quad C_0 = 8 Cl$$

sein, der Schutzkondensator müßte achtmal soviel Kapazität haben wie die ganze Leitung. Ist z. B. für eine Freileitung $C = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Fd} \cdot \text{km}^{-1}$, so braucht man für eine Leitung von 20 km Länge einen Kondensator

$$C_0 = 8 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 10^{-9} \text{ Fd} = 0,8 \text{ Mfd.}$$

Für Kabel wäre die Kapazität ein Vielfaches davon, und so große Kondensatoren lassen sich nicht wirtschaftlich bauen. Der Kondensator dient daher in erster Linie zur Abflachung der Welle.

d) Ein Schwingungskreis im Anschluß an eine Leitung.

Ein Fall, bei dem unter Umständen hohe Spannungen auftreten können, liegt nach Petersen¹⁾ vor, wenn am Ende einer Leitung eine Induktivität L_0 (etwa ein Stromwandler oder ein Schaltermagnet) und die Sammelschienen von der Kapazität C_0 einen Schwingungskreis bilden.

Hier gilt für die freien Schwingungen nach Gl. 411.

$$(\varphi + \varrho) e^{-\alpha t} = \frac{L_0}{Z} \frac{d e^{-\alpha t} (\varphi - \varrho)}{dt} + \frac{1}{C_0 Z} \int e^{-\alpha t} (\varphi - \varrho) dt. \quad (417)$$

Sieht man von der Dämpfung ab, d. h. setzt $\alpha = 0$, so ergibt sich durch Differentiation dieser Gleichung und Ordnung nach ϱ

$$\frac{d^2 \varrho}{dt^2} + \frac{Z}{L_0} \frac{d\varrho}{dt} + \frac{\varrho}{L_0 C_0} = \frac{\varphi}{L_0 C_0} - \frac{Z}{L_0} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (418)$$

Nehmen wir an, der Stromkreis werde z. Z. $t=0$ an eine Gleichspannung P angeschlossen. Dann ist

$$\begin{aligned} p_a &= 0, & i_a &= 0, & p_e &= P, & i_e &= 0, \\ p_{f(0)} &= -P, & i_{f(0)} &= 0, & f_1(x) &= f_2(x) = -\frac{1}{2}P. \end{aligned}$$

Am Leitungsende ist von $t=0$ bis $t=t_1$ $\varphi = -\frac{1}{2}P$, und es gilt nach Gl. 418 für diese Zeit

$$\frac{d^2 \varrho}{dt^2} + \frac{Z}{L_0} \frac{d\varrho}{dt} + \frac{\varrho}{L_0 C_0} = -\frac{1}{2} \frac{P}{L_0 C_0} \quad \dots \quad (419)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt eine aperiodische oder eine oszillierende Ladung (s. Kap. XIII S. 268), je nachdem $\frac{Z}{2} \gtrless \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ ist.

¹⁾ Archiv f. Elektrotechnik Bd. I, S. 233.

Da die Kapazität von Sammelschienen klein ist, ist der zweite Fall der praktisch häufiger vorkommende, wir nehmen ihn an. Dann ist die allgemeine Lösung

$$\varrho = -\frac{1}{2}P + A \sin(\beta t + \delta) e^{-\zeta t},$$

worin A und δ die Integrationskonstanten sind. β ist die Kreisfrequenz, ζ der Dämpfungsfaktor

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{L_0 C_0} - \left(\frac{Z}{2L_0}\right)^2} \quad \zeta = \frac{Z}{2L_0}.$$

Die Charakteristik Z spielt auch hier formell die Rolle des Ohmschen Widerstandes, bedeutet aber nicht einen Energieverlust, sondern die Umwandlung von elektrischer Energie in magnetische und umgekehrt.

Aus der Stetigkeit des Stromes der Drosselspule und der Spannung am Kondensator, die beide z. Z. $t=0$ Null waren, folgt

$$i = i_e + \frac{(\varphi - \varrho)}{Z} = 0 - A \sin \delta = 0 \\ \delta = 0$$

Die Kondensatorspannung ist

$$p_c = p - L_0 \frac{di}{dt} = p_e + \varphi + \varrho - \frac{L_0}{Z} \frac{d(\varphi - \varrho)}{dt}.$$

Hier wird für $t=0$, $\beta A = 0$, daher $A = 0$ und

$$\varrho(0 \div t_1) = -\frac{1}{2}P.$$

Am Leitungsanfang ist die freie Spannung Null, weil dort die Spannung konstant P ist, die Welle f_2 wird am Anfang mit umgekehrtem Vorzeichen reflektiert, ans Leitungsende kommt

$$\varphi(t_1 \div 2t_1) = +\frac{1}{2}P$$

zurück, hieran schließt sich $\varphi(2t_1 \div 3t_1) = -\varrho(0 \div t_1) = +\frac{1}{2}P$ an, so daß von t_1 bis $3t_1$ $\varphi(t_1 \div 3t_1) = \frac{1}{2}P$ ist.

Die Lösung der Gl. 419 wird mit diesem Werte

$$\varrho(t_1 \div 3t_1) = \frac{1}{2}P + A \sin[\beta(t - t_1) + \delta] e^{-\zeta(t - t_1)}.$$

Zur Zeit $t=t_1$ waren i und die Kondensatorspannung noch Null, also ist

$$\varphi(t_1) - \varrho(t_1) = 0 \\ p_e + \varphi(t_1) + \varrho(t_1) - \frac{L_0}{Z} \frac{d(\varphi(t_1) - \varrho(t_1))}{dt} = 0.$$

Aus der ersten Bedingung folgt:

$$A \sin \delta = 0, \quad \delta = 0,$$

aus der zweiten:

$$2P = -\frac{L_0}{Z} \beta A, \quad A = -2P \frac{Z}{\beta L_0}$$

$$\varrho(t_1 \div 3t_1) = \frac{P}{2} - 2P \frac{Z}{\beta L_0} e^{-\zeta(t - t_1)} \sin \beta(t - t_1).$$

Am Ende dieses Intervalls ist

$$Q(3t_1) = \frac{P}{2} - 2P \frac{Z}{\beta L_0} e^{-2\zeta t_1} \sin 2\beta t_1,$$

der Ladestrom

$$i(3t_1) = \frac{(\varphi - \varrho)}{Z} = \frac{2P}{\beta L_0} e^{-2\zeta t_1} \sin 2\beta t_1.$$

Er hat gerade eine halbe Schwingung ausgeführt, wenn $2\beta t_1 = \pi$ ist, oder

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{4t_1} = \frac{v}{4l}.$$

$\frac{\beta}{2\pi}$ ist die Eigenfrequenz des Schwingungskreises, $\frac{v}{4l}$ die Eigenfrequenz der Leitung. Bei Gleichheit beider besteht Resonanz. Die Kondensatorspannung hat z. Z. $3t_1$ den Wert

$$p_c(3t_1) = 2P \left\{ 1 - \left[\frac{Z}{L_0 \beta} \sin 2\beta t_1 - \frac{1}{\beta} (\zeta \sin 2\beta t_1 - \beta \cos 2\beta t_1) \right] e^{-2\zeta t_1} \right\}.$$

Für $2\beta t_1 = \pi$ wird, wenn $e^{-2\zeta t_1} \approx 1$ gesetzt wird,

$$p_c(3t_1) \approx 4P.$$

Für die Zeit $3t_1$ bis $5t_1$ wird nun

$$\varphi(3t_1 + 3t_1) = -Q(t_1 + 3t_1) = -\frac{P}{2} + 2P \frac{Z}{\beta L_0} e^{-\zeta(t-3t_1)} \sin \beta(t-3t_1)$$

und in analoger Weise wie früher, wenn wir uns auf den Fall der Resonanz beschränken:

$$Q(3t_1 + 5t_1) = -\frac{P}{2} + 2P \frac{Z}{\beta L_0} (e^{-\zeta(t-t_1)} + 2e^{-\zeta(t-3t_1)}) \sin \beta(t-3t_1),$$

ferner

$$Q(5t_1 + 7t_1) = +\frac{P}{2} - 2P \frac{Z}{\beta L_0} [e^{-\zeta(t-t_1)} + 2e^{-\zeta(t-3t_1)} + 3e^{-\zeta(t-5t_1)}] \sin \beta(t-5t_1)$$

usf.

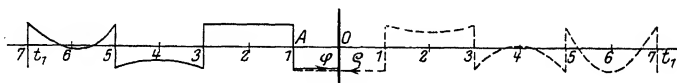


Fig. 217.

In Fig. 217 sind für ein Beispiel $L_0 = 10^{-3}$ Henry, $C_0 = 10^{-9}$ F., für ein Kabel mit $Z = 100$ die Werte von ϱ und φ als Funktion der Zeit aufgetragen.

Hier ist $\beta \approx 10^6$. Daher besteht Resonanz, wenn wir für das Kabel $v = 2 \cdot 10^5$ km · sek⁻¹ annehmen, bei einer Leitungslänge

$$l = \frac{\pi}{2} \frac{v}{\beta} = \frac{\pi}{2} \frac{2 \cdot 10^5}{10^6} = 0,314 \text{ km.}$$

Fig. 218 zeigt den zeitlichen Verlauf des Stromes und der Spannungen am Kondensator und an der Drosselspule. Von 0 bis t_1 wandern die Spannung P und der Strom $\frac{P}{Z}$ zum Ende der Leitung;

der Strom kann hier nicht plötzlich auf diesen Wert springen, die Spannungswelle wird auf den doppelten Wert reflektiert, und der Spannungssprung P wandert über die auf der Leitung schon vorhandene Spannung P zurück. Währenddessen beginnt der Kondensator sich zu laden, die Spannung an der Drosselspule nimmt von $2P$ ab. Der Spannungssprung P wird am Leitungsanfang zurückgeworfen, da dort die Spannung konstant ist, und gelangt z. Z. $3t_1$ wieder an das Leitungsende. Ist die Zeit des Hin- und Herwanderns gerade die halbe Schwingungszeit des Schwingungskreises, d. h. bei Resonanz, so ist im Grenzfall (wenn $e^{-\zeta t} = 1$ wäre) die Spannung an der Drosselspule $-2P$, am Kondensator $4P$. Der einfallende Sprung wird auf den doppelten Wert reflektiert, die Spannung an der Drosselspule ändert sich sprunghaft auf $-4P$, während der folgenden Halbperiode wird der Kondensator von $4P$ auf $-4P$ entladen, dann steigt die Drosselspulen-spannung wieder sprunghaft um $2P$ usw., so daß sie nach $5t_1$ ohne Dämpfung schon $6P$ wäre und sich weiter steigern würde, wenn die Dämpfung und Überschlüsse es nicht verhinderten.

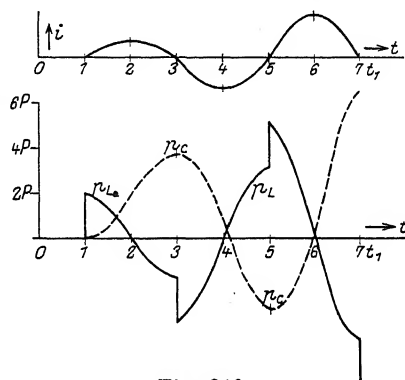


Fig. 218.

Dieser Fall tritt bei den hohen Frequenzen solcher Schwingungskreise nur bei kurzen Leitungslängen auf, er kann z. B. bei einem Erdschluß entstehen. An der Erdschlußstelle fällt die Spannung plötzlich auf Null, es wandert eine Entladewelle hin und her. Ihre Höhe kann beim Neuzünden eines intermittierenden Erdschlußlichtbogens die betriebsmäßige Spannung wesentlich übersteigen. Bei kurzem Abstand ist eine Resonanz möglich.

Zu deren Verhütung werden Stromwandler u. a. Spulen durch Widerstände überbrückt. Die oszillierende Ladung wird verhindert,

wenn der Überbrückungswiderstand $R_0 < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ ist. Andererseits

soll er so groß sein, daß er den Strom der Grundfrequenz nicht wesentlich beeinflusst. Silitwiderstände zeigen bei hohen Spannungen einen kleineren Widerstand als bei kleinen, dieses Verhalten macht sie hier besonders geeignet.

94. Reflexion an der Übergangsstelle von Leitungen mit verschiedener Charakteristik.

Im folgenden soll der Übergang der Wellen von einer Leitung zu einer anderen mit abweichender Charakteristik untersucht werden. Die erste Leitung erstreckt sich von $x=0$ bis $x=l_I$, die zweite schließt sich daran von $x=l_I$ bis $x=l_{II}$. Die Charakteristiken der Leitungen seien Z_I und Z_{II} .

Die Ausgleichsvorgänge auf jeder Leitung lassen sich durch zwei in entgegengesetzter Richtung wandernde Wellen, f_{I1} , f_{I2} , f_{II1} , f_{II2} darstellen. Es ist

$$\begin{aligned} p_{fI} &= e^{-\alpha_I t} [f_{I1}(x - v_I t) + f_{I2}(x + v_I t)] \\ i_{fI} Z_I &= e^{-\alpha_I t} [f_{I1}(x - v_I t) - f_{I2}(x + v_I t)] \\ p_{fII} &= e^{-\alpha_{II} t} [f_{II1}(x - v_{II} t) + f_{II2}(x + v_{II} t)] \\ i_{fII} Z_{II} &= e^{-\alpha_{II} t} [f_{II1}(x - v_{II} t) - f_{II2}(x + v_{II} t)] \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die Beziehungen, die zwischen den vier Wellen am Übergangspunkt $x=l_I$ bestehen. Zur Abkürzung werden für $x=l_I$ die Momentanwerte für die im Sinne der positiven x wandernden Wellen mit φ , die im Sinne der negativen x wandernden mit ϱ bezeichnet:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_I t} f_{I1}(l_I - v_I t) &= \varphi_I, & e^{-\alpha_I t} f_{I2}(l_I + v_I t) &= \varrho_I \\ e^{-\alpha_{II} t} f_{II1}(l_I - v_{II} t) &= \varphi_{II}, & e^{-\alpha_{II} t} f_{II2}(l_I + v_{II} t) &= \varrho_{II}. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Spannung und des Stromes verlangt, daß für $x=l_I$, $p_{fI} = p_{fII}$ und $i_{fI} = i_{fII}$ ist, daher

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I + \varrho_I &= \varphi_{II} + \varrho_{II} \\ \frac{1}{Z_I}(\varphi_I - \varrho_I) &= \frac{1}{Z_{II}}(\varphi_{II} - \varrho_{II}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (420)$$

Betrachtet man die im Punkte $x=l_I$ eintreffenden Wellen φ_I und ϱ_{II} als gegeben, so ergeben sich die anderen aus Gl. 420 durch die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \varrho_I &= \varphi_I \frac{Z_{II} - Z_I}{Z_{II} + Z_I} + \varrho_{II} \frac{2Z_I}{Z_I + Z_{II}} \\ \varphi_{II} &= \varrho_{II} \frac{Z_I - Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} + \varphi_I \frac{2Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (421)$$

Das in diesen Gleichungen enthaltene Reflexionsgesetz für die Übergangsstelle sagt folgendes aus.

Von jeder der beiden auffallenden Wellen φ_I und ϱ_{II} wird ein Teil auf die gleiche Leitung reflektiert, ein anderer Teil tritt in die andere Leitung über.

Von φ_I wird auf Leitung I reflektiert

$$\varphi_I \frac{Z_{II} - Z_I}{Z_I + Z_{II}} = \varphi_I q \dots \dots \dots (421a)$$

q ist der Reflexionsfaktor. Von ϱ_{II} wird auf Leitung II reflektiert

$$\varrho_{II} \frac{Z_I - Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} = -\varrho_{II} q \dots \dots \dots (421b)$$

Der Reflexionsfaktor hat wegen der entgegengesetzten Richtung der Fortpflanzung das negative Vorzeichen, aber die gleiche Größe wie oben.

Von φ_I tritt auf Leitung II über

$$\varphi_I \frac{2Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} = \varphi_I [1 - (-q)] \dots \dots \dots (421c)$$

Von ϱ_{II} tritt auf Leitung I über

$$\varrho_{II} \frac{2Z_I}{Z_I + Z_{II}} = \varrho_{II} (1 - q) \dots \dots \dots (421d)$$

Somit kann man Gl. 421 schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_I &= \varphi_I q + \varrho_{II} (1 - q) \\ \varrho_{II} &= -\varrho_{II} q + \varphi_I (1 + q) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (422)$$

worin

$$q = \frac{Z_{II} - Z_I}{Z_I + Z_{II}}.$$

Ist $Z_{II} > Z_I$, so ist q positiv. Dies ist z. B. der Fall, wenn Leitung II eine Freileitung, Leitung I ein Kabel ist. Die vom Kabel auf die Freileitung übertretende Welle ist im Verhältnis $(1 + q)$ vergrößert, die von der Freileitung in das Kabel übertretende Welle ist im Verhältnis $(1 - q)$ verkleinert.

Bei Verfolgung des Ausgleichsvorgangs ist zu berücksichtigen, daß die Wellen auf Leitungen mit verschiedenen Konstanten ungleich stark gedämpft werden und mit ungleicher Geschwindigkeit fortschreiten. Die Zeit der Fortpflanzung über die Leitungslänge l ist

$$t = \frac{l}{v} = \frac{l\sqrt{\epsilon\mu}}{c}.$$

Man kann daher den Vorgang für alle Leitungen auf die Lichtgeschwindigkeit c beziehen durch Einführung der „reduzierten“ Länge

$$l' = l\sqrt{\epsilon\mu}.$$

Für ein Kabel ist sie $l' = l\sqrt{\epsilon}$.

Beispiele.

1. Das Laden einer am Ende offenen Freileitung über ein Kabel.

Das Kabel wird am Anfang $x=0$ z. Z. $t=0$ an eine Stromquelle von konstanter Spannung P und großer Kapazität ange-

geschlossen. Kabel und Freileitung sind zunächst strom- und spannungslos, zu Ende der Ladung stehen beide unter der Spannung P . Wie für eine einzelne Leitung sind daher auch hier z. Z. $t=0$ die Wellen für beide Leitungen

$$f_{I1}(x) = f_{I2}(x) = f_{II1}(x) = f_{II2}(x) = -\frac{1}{2}P.$$

Für die Reflexion gilt:

a) bei $x=0$ ist $p=\text{konst.}=P$; $p_f=0$, daher Reflexion mit umgekehrtem Vorzeichen;

b) bei $x=l_{II}$ ist $i_f=0$, daher Reflexion mit gleichem Vorzeichen;

c) bei $x=l_I$ ist nach Gl. 422

$$q_I = q\varphi_I + (1-q)\varphi_{II}$$

$$\varphi_{II} = -q\varphi_{II} + (1+q)\varphi_I.$$

Nimmt man z. B. für das Kabel $Z_I=60$, für die Freileitung $Z_{II}=600$ an, so wird:

$$q = \frac{600-60}{600+60} = 0,82$$

$$\dot{q}_I = 0,82\varphi_I + 0,18\varphi_{II}$$

$$\varphi_{II} = -0,82\varphi_{II} + 1,82\varphi_I$$

φ_I ist fast ebenso groß wie φ_I , am Ende des Kabels wird φ_I fast ebenso reflektiert als ob das Kabel offen wäre, weil die Freileitung große Induktivität hat.

Die auf der Freileitung zum Anschlußpunkt des Kabels wandernde Welle φ_{II} wird mit umgekehrtem Vorzeichen fast in voller Stärke reflektiert, da das Kabel, das eine große Kapazität besitzt, für die auf der Freileitung ankommende Welle nahezu einen Kurzschluß darstellt.

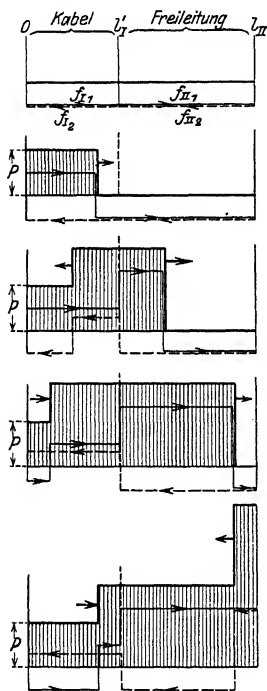


Fig. 219.

Fig. 219 zeigt den Anfang des Ladevorgangs unter Vernachlässigung der Dämpfung. Eine resultierende Spannungswelle P wandert über das Kabel und erreicht den Anschlußpunkt z. Z. $t_I = \frac{l'_I}{v}$; nach dieser Zeit ist (abgesehen von der Dämpfung) $\varphi_I = \frac{1}{2}P$, $\varphi_{II} = -\frac{1}{2}P$, die resultierende Spannung am Ende des Kabels ist

$$P + \varphi_I + \varphi_{II} = P \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[q - (1-q)] \right\} = 1,82P.$$

Die Spannung ist nahezu verdoppelt und zieht mit dieser Höhe in die Freileitung ein. Zur Zeit $t_{II} = \frac{l'_I + l_{II}}{v}$ gelangt die Welle an das offene Ende und wird dort mit gleichem Vorzeichen reflektiert.

Die resultierende Spannung wird dort, abgesehen von der Dämpfung, $3,64 P$, somit nahezu der vierfache Wert.

Folgt auf eine Leitung eine zweite mit wesentlich höherer Charakteristik, so wird eine an der Übergangsstelle eintreffende Schaltwelle nahezu verdoppelt. Der Grenzfall $q=1$ ergibt sich, wenn Z_{II} unendlich groß gegen Z_I ist, d. h. am offenen Leitungsende.

Oft betrachtet man in erster Annäherung Wicklungen von Maschinen und Transformatoren als Leitungen, deren Charakteristik sehr groß gegen die eines Kabels oder einer Freileitung ist. Es folgt dann, daß jede auf die Wicklung treffende Schaltwelle mit nahezu doppelter Höhe in die Wicklung einzieht.

Die Höhe der eintreffenden Welle hängt von der Art des Vorganges ab und braucht an sich nicht gefährlich zu sein.

Beim betriebsmäßigen Einschalten, z. B. einer zweipoligen Leitung mit der Betriebsspannung p , wandert auf jeder Zuleitung eine Welle von der halben Amplitude $\pm \frac{1}{2} p_m$ gegen Erde, so daß beim Eintreffen an der Spule die Isolation gegen Erde nur mit der betriebsmäßigen Amplitude beansprucht wird. Die beiden Wellen entgegengesetzten Vorzeichens treffen sich in der Mitte der Spule und heben sich dort auf, der Mittelpunkt behält dauernd die Spannung Null. Anders beim einpoligen Einschalten, hier wird, wie bei der Leitung II im Beispiel, die Spannung am isolierten Ende nochmals auf den doppelten Wert reflektiert, hier auf die doppelte Amplitude. Ist ein Pol der Zuleitung geerdet, so erhält die andere die volle Betriebsspannung gegen Erde, die beim Auftreffen auf die Wicklung verdoppelt wird. Auch bei Rückzündungen beim Abschalten eines Kabels (s. S. 291) erfolgt bei der Neuzündung ein Einschalten mit doppelter betriebsmäßiger Amplitude, bei noch höheren Spannungen zündet der intermittierende Erdschlußlichtbogen.

Die Isolation gegen Erde wird daher stets für die doppelte Betriebsspannung bemessen.

Am gefährlichsten für die Wicklung ist das Eindringen der steilen Wellenstirn, d. h. der Spannungssprung. Er entsteht bei der Einleitung eines Schaltvorganges durch einen Schaltfunken und bedeutet für die Wicklung, daß benachbarte Windungen zeitweise die volle Spannung der Welle gegeneinander annehmen. Sie übersteigt die betriebsmäßige Beanspruchung um ein Vielfaches und erklärt die häufig zu beobachtenden Überschläge zwischen den Windungen.

Da die Wellen beim Fortschreiten gedämpft werden, sind die ersten Windungen am meisten gefährdet und sind besonders stark gegeneinander zu isolieren.

Die Höhe der Schaltwelle bedingt die Höhe der Windungsbeanspruchung. Beim einpoligen Schalten war die Spannung am isolierten Ende der Wicklung $\sim 2 p_m$, ist der zweite Schalter dabei nur noch so weit geöffnet, daß der Funke überspringen kann, so

beginnt, da er die Spannung $-\frac{1}{2}p_m$ gegen Erde hat, ein Schaltvorgang mit 2,5 facher Amplitude. Beim ungleichzeitigen Schalten, wie es beim Schalten mit Trennmessern vorkommt, werden in der Tat Windungsdurchschläge am zuletzt eingeschalteten Ende häufig beobachtet; solches Schalten ist grundsätzlich zu vermeiden.

2. Der Schalter liegt an der Verbindungsstelle zweier Leitungen. Leitung I steht unter Spannung, wenn z. Z. $t=0$ der Schalter geschlossen wird, Leitung II ist noch spannungslos. Zu Anfang ist daher auf Leitung I

$$p_{aI} = P, \quad i_{aI} = 0,$$

auf Leitung II

$$p_{aII} = 0, \quad i_{aII} = 0.$$

Im Endzustand ist für beide Leitungen $p_e = P, i_e = 0$. Daher werden die Wellen z. Z. $t=0$

$$\begin{aligned} f_{I1}(x) &= f_{I2}(x) = 0 \\ f_{II1}(x) &= f_{II2}(x) = -\frac{1}{2}P, \end{aligned}$$

oder mit der früheren Bezeichnung für die Übergangsstelle $x=l$,

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \varrho_I = 0 \\ \varphi_{II} &= \varrho_{II} = -\frac{1}{2}P. \end{aligned}$$

Nach dem Reflexionsgesetz Gl. 422 ist dann unmittelbar nach dem Einschalten, da $\varphi_I = 0$ ist,

$$\begin{aligned} \varrho_I &= q\varphi_I + (1-q)\varrho_{II} = -\frac{1}{2}P(1-q), \\ \varphi_{II} &= (1+q)\varphi_I - q\varrho_{II} = +\frac{1}{2}Pq. \end{aligned}$$

In die Leitung II wandert also die resultierende Welle

$$p_{II} = p_e + p_{fII} = P + \varphi_{II} + \varrho_{II} = \frac{1}{2}P(1+q) = P \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}}. \quad (423)$$

In der Leitung I überlagert sich über die Spannung P eine „rückläufige Schaltwelle“

$$\varrho_I = -\frac{1}{2}P(1-q) = -P \frac{Z_I}{Z_I + Z_{II}} \quad \dots \quad (424)$$

Der Strom ist

$$\frac{\varphi_{II} - \varrho_{II}}{Z_{II}} = \frac{P}{Z_I + Z_{II}}.$$

Ist $Z_{II} > Z_I$, also z. B. wenn die zuzuschaltende Leitung II eine Freileitung, I ein Kabel ist, so ist die resultierende in Leitung II einziehende Welle p_{II} etwas kleiner als P , die rückläufige Schaltwelle ϱ_I ist klein. Im Grenzfall, wenn Z_I als sehr klein gegen Z_{II} vernachlässigt und $q \cong 1$ gesetzt werden kann, ist $p_{II} \cong P$ und $\varrho_I \cong 0$.

Ist dagegen $Z_I > Z_{II}$, also wenn die zuzuschaltende Leitung II ein Kabel, die eingeschaltete I eine Freileitung ist, so ist die in das Kabel einziehende Welle p_{II} klein (im Grenzfall, $q \cong -1$, $p_{II} = 0$), die rückläufige Schaltwelle ϱ_I ist dagegen groß (im Grenzfall gleich $-P$). Hier bringt das Kabel, das einen großen Ladestrom

aufnimmt, die Spannung am Ende der Freileitung, die nur geringe Kapazität besitzt, zum Abfall. Die beiden Fälle sind in Fig. 220 dargestellt.

Auch dieses Beispiel gestattet einige wichtige Schlußfolgerungen, auf die Rüdenberg¹⁾ und Linke²⁾ hingewiesen haben.

Denken wir uns Leitung I ersetzt durch einen Stromerzeuger, so liegt der zweite Fall vor, daß $Z_I > Z_{II}$ ist. Da die Spannung des Generators im stationären Zustand vom Spannungsmittelpunkt

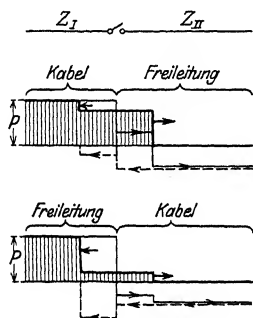


Fig. 220.

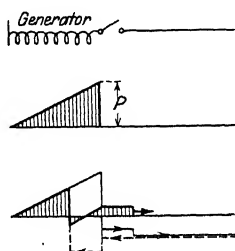


Fig. 221.

an längs der Wicklung ansteigt, kann der Anfangszustand etwa durch die schräge Gerade Fig. 221 dargestellt werden. P ist die Spannung des Endes der Wicklung gegen den Mittelpunkt, bei einem Einphasengenerator die halbe Betriebsspannung, bei einem Dreiphasengenerator die Phasenspannung (Sternspannung).

Durch das Eindringen der rückläufigen Schaltwelle sinkt die Spannung an den Generatorklemmen nahezu auf Null und es wandert ein Spannungssprung in die Wicklung, dessen Höhe fast gleich P ist, wobei die Isolation von Windung zu Windung stark beansprucht wird.

Noch ungünstiger liegt der Fall, wenn zwischen dem Generator und Schalter ein Stück Freileitung liegt. Wird durch den Schalter ein Kabel angeschlossen, so wandert zunächst die rückläufige Schaltwelle vom Schalter in die Freileitung. Gelangt sie an den Generator, so wird der Spannungssprung durch Reflexion nahezu verdoppelt, so daß die Isolation der ersten Windungen entsprechend höher beansprucht wird.

Die beim Einschalten von Kabeln, besonders hinter einem Stück Freileitung, beobachteten Windungsüberschläge an Generatoren sind hierdurch zu erklären, und werden durch Schalter mit Widerstandsstufe verhütet.

¹⁾ Elektrotechnik und Maschinenbau 1912, Heft 8.

²⁾ Archiv f. Elektrotechnik Bd. I, 1912, Heft 4.

Die Betrachtung zeigt auch, daß man bei Untersuchung des Einschaltvorganges auf der Leitung die Rückwirkung auf den Generator nicht ohne weiteres vernachlässigen darf. Bei den einfachen Beispielen S. 296 hatten wir daher hervorgehoben, daß die Stromquelle mit großer Kapazität versehen zu denken ist.

Eine weitere Folge ist, daß die umgekehrte Reihenfolge: Freileitung—Kabel—Generator (oder Transformator) einen Windungsschutz für die Wicklung ergibt, weil von jeder aus der Freileitung kommenden Wanderwelle nur ein Bruchteil in das Kabel einzieht (s. Fig. 220). Die Einschaltung eines Kabelstückes zwischen Freileitung und Maschinenwicklung ist eine häufig getroffene Maßnahme auch bei Hochspannungsmotoren. Das Kabelstück soll zwischen Schalter und Maschine liegen.

Bei der vollständigen Verfolgung des Vorgangs wären die wiederholten Reflexionen an allen Übergangsstellen und Leitungsenden zu berücksichtigen. Von Interesse sind meist die Fälle, bei denen die Dämpfung während der Laufzeit über ein Leitungsstück gering ist, also wenn die Länge eines Stückes kurz gegen die anderen ist.

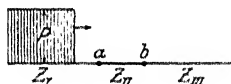


Fig. 222.

3. Zwischen zwei langen Leitungen liegt ein kurzes Leitungsstück (Fig. 222), die Charakteristiken seien Z_I , Z_{II} , Z_{III} .

Eine Wanderwelle mit der Spannung P gelangt aus Leitung I kommend z. Z. $t=0$ an die Übergangsstelle a zur Leitung II. Sei q_a der Reflexionsfaktor einer Welle, die von I nach II läuft, so tritt z. Z. $t=0$ in Leitung II eine Teilwelle $p_{II} = P(1 + q_a)$ über, während $p_{I1} = -Pq_a$ in Leitung I zurückläuft. Die Welle $p_{II} = P(1 + q_a)$ gelangt z. Z. $t=t_1 = \frac{l_{II}}{v_{II}}$ nach der Übergangsstelle b zur Leitung III.

Der Reflexionsfaktor beim Übergang von Leitung II auf III sei q_b und es tritt nun $p_{III} = P(1 + q_a)(1 + q_b)$ nach Leitung III über, während $p_{bII} = P(1 + q_a)q_b$ auf Leitung II zurückläuft und z. Z. $2t_1$ nach a gelangt. Für diese in umgekehrter Richtung wandernde Welle ist der Reflexionsfaktor $-q_a$, der Durchgangsfaktor $(1 - q_a)$. Es folgen nun zu Zeiten, die ungerade Vielfache von t_1 sind, Reflexionen am Punkt b , bei geraden Vielfachen von t_1 am Punkt a . Ist Leitung II kurz gegen I und III, so erfolgt eine große Anzahl Reflexionen, ehe die nach den Leitungen I und III übertretenden Wellen an deren Enden zurückgeworfen werden. Man erhält bei Fortlassung des gemeinsamen Faktors P folgendes Reflexionsschema¹⁾.

¹⁾ s. Petersen, Arch. f. El. Bd. I, S. 233. Rogowski, Arch. f. El. Bd. IV, S. 204. Wagner, ETZ 1916, Heft 32.

Z. z.	Von Punkt <i>a</i> wandert		Von Punkt <i>b</i> wandert	
	nach Leitung I	nach Leitung II	nach Leitung II	nach Leitung III
0	q_a	$1 + q_a$		
t_1			$(1 + q_a)q_b$	$(1 + q_a)(1 + q_b)$
$2t_1$	$(1 + q_a)(1 - q_a)q_b$	$(1 + q_a)q_b(-q_a)$		
$3t_1$			$(1 + q_a)q_b^2(-q_a)$	$(1 + q_a)(1 + q_b)q_b(-q_a)$
$4t_1$	$(1 + q_a)(1 - q_a)q_b^2(-q_a)$	$(1 + q_a)q_b^2(-q_a)^2$		
$5t_1$			$(1 + q_a)q_b^3(-q_a)^2$	$(1 + q_a)(1 + q_b)q_b^2(-q_a)^2$
$6t_1$	$(1 + q_a)(1 - q_a)q_b^3(-q_a)^2$	$(1 + q_a)q_b^3(-q_a)^3$		
$7t_1$			$(1 + q_a)q_b^4(-q_a)^3$	$(1 + q_a)(1 + q_b)q_b^3(-q_a)^3$

Trägt man für einen bestimmten Zeitpunkt alle bis dahin entstandenen Teilwellen auf, so erhält man das Bild der räumlichen Spannungsverteilung. Als einfaches Zahlenbeispiel sei angenommen, daß $Z_I = Z_{III}$ sei und Z_{II} kleiner, etwa $Z_I : Z_{II} : Z_{III} = 10 : 1 : 10$. Hierfür wird

$$q_a = \frac{Z_{II} - Z_I}{Z_I + Z_{II}} = -\frac{9}{11}, \quad q_b = \frac{Z_{III} - Z_{II}}{Z_{II} + Z_{III}} = +\frac{9}{11}.$$

Fig. 223 zeigt rechts die in Leitung III eindringende treppenförmig abgestufte Welle, links die über die ankommende Welle P überlagerte, entsprechend abgestufte, rückwandernde Welle. Die Höhe der ersten Stufe des in III wandernden Wellenkopfes ist $P(1 + q_a)(1 + q_b) = 0,33P$, die folgenden Stufen folgen entsprechend dem Schema einer geometrischen Reihe. Setzen wir zur Abkürzung $(q_b)(-q_a) = Q$, so wird die Höhe des Kopfes bei der n^{ten} Stufe

$$P(1 + q_a)(1 + q_b)[1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1}] \\ = P(1 + q_a)(1 + q_b) \frac{1 - Q^n}{1 - Q} \dots \dots \dots (425)$$

Die Breite jeder Stufe entspricht dem Fortschreiten in der Zeit $2t_1$ und ist auf Leitung III:

$$x_{III} = 2t_1 v_{III} = 2l_{II} \frac{v_{III}}{v_{II}}.$$

Für eine beliebige lange auf I ankommende Welle wird der Grenzwert der Höhe des in III einziehenden Wellenkopfes, da in Gl. 425 für große n Q^n gegen 1 verschwindet,

$$P \frac{(1 + q_a)(1 + q_b)}{1 + q_a q_b} = P \frac{2Z_{II}}{Z_I + Z_{III}}, \dots \dots (426)$$

das ist der Wert, mit dem eine auf I ankommende Welle direkt nach III übertreten würde. Ist die ankommende Welle hinreichend

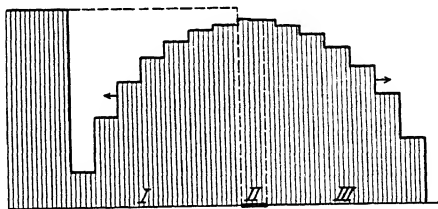


Fig. 223.

lang, so wird die Höhe der übertretenden Welle durch die Zwischenleitung II (abgesehen von der Dämpfung) gar nicht beeinflusst. Sie bewirkt nur eine Verbreiterung des Wellenkopfes und eine stufenweise Ladung der Leitung III. Ist III eine Maschinenwicklung, $Z_{III} > Z_I$, so wird die übertretende Welle im Grenzfall höher als die ankommende, und kann schon nach wenigen Stufen die ursprüngliche Höhe erreichen. Der durch die Verminderung der ersten Spannungsstufe erzielte Windungsschutz wird daher illusorisch, wenn die Verbreiterung des Wellenkopfes bei Erreichung der vollen Spannung kleiner ist als die Länge einer ganzen Spule der zu schützenden Wicklung. Die (reduzierte) Länge des schützenden Zwischenstückes muß daher der Spulenlänge der zu schützenden Wicklung angepaßt sein.

Da der Grenzwert der übertretenden Welle nach (426) unabhängig von Z_{II} ist, gelten diese Erwägungen auch, wenn Z_{II} größer als Z_I und Z_{III} ist. Betrachtet man eine Schutzdrosselspule mit sehr kleiner Erdkapazität als Leitung von sehr hoher Charakteristik, so folgt, daß ihre Länge ebenfalls der Länge einer ganzen Spule einer zu schützenden Transformatorwicklung angepaßt sein muß. Der mangelnde Schutzwert kleiner Drosselspulen ist bekannt.

Ist die Länge der auf I ankommenden Welle begrenzt (l_0), so steigt der in III übertretende abgestufte Wellenkopf nach einer Anzahl (m) Stufen nicht mehr, wenn $mx'_{III} = l_0$ ist, es schließt sich ein entsprechend abgestufter Wellenschweif an. Nur in diesem Falle wird, auch abgesehen von der Dämpfung, die Höhe der Welle verringert.

Für die in Leitung I wandernde Welle erhält man aus dem Reflexionsschema die Höhe bei der n^{ten} Stufe, wenn wieder abgekürzt $q_b(-q_a) = Q$ gesetzt wird.

$$\left. \begin{aligned} P[q_a + (1 + q_a)(1 - q_a)q_b\{1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-2}\}] \\ = P\left[q_a + (1 + q_a)(1 - q_a)q_b \frac{1 - Q^{n-1}}{1 - Q}\right] \end{aligned} \right\} (427)$$

Diese Welle überlagert sich über die einfallende. Je nachdem q_a negativ oder positiv ist, d. h. $Z_{II} \leq Z_I$, entsteht eine Senkung oder eine Erhöhung der einziehenden Welle.

Für große Werte n verschwindet in (427) rechts wieder Q^{n-1} gegen 1 und der Grenzwert der Höhe der reflektierten Welle ist

$$P\left[q_a + \frac{(1 + q_a)(1 - q_a)q_b}{1 + q_a q_b}\right] = P \frac{Z_{III} - Z_I}{Z_I + Z_{III}}, \quad (428)$$

das ist der Wert der von Leitung III direkt nach I zurückgeworfenen Welle.

Liegt an einem der Übergangspunkte in Fig. 221 ein Schalter, z. B. in b , wobei I und II vor dem Schließen des Schalters auf die

Spannung P geladen waren, so läßt sich für die wiederholten Reflexionen an a und b das analoge Schema aufstellen. Hier läuft nach dem Schließen des Schalters zunächst von b nach Gl. 423 und 424 Seite 324 nach Leitung III eine Ladewelle $\frac{1}{2}P(1+q_b)$ und in Leitung II eine Entladewelle $\frac{1}{2}P(q_b-1)$, von dieser wird in a auf Leitung II reflektiert $\frac{1}{2}P(q_b-1)(-q_a)$, während nach I durchtritt $\frac{1}{2}P(q_b-1)(1-q_a)$ usf. Man erhält als Grenzwert der Höhe für die rückläufige Schaltwelle nach I wieder den Wert $-P \frac{Z_I}{Z_I + Z_{III}}$, der bei direkter Reflexion von III nach I auftreten würde.

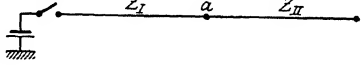
4. Durch wiederholte Reflexionen an Leitungen verschiedener Charakteristik können, wie Petersen¹⁾ gezeigt hat, bei richtiger Abstimmung Resonanzschwingungen erregt werden. Eine Leitung I  Fig. 224 werde am Leitungsanfang eingeschaltet, an ihr Ende schließt

Fig. 224.

sich eine Leitung II an. Die resultierende Ladewelle von der Spannung P gelange z. Z. $t=0$ an die Übergangsstelle a . Von hier tritt nach Leitung II eine Welle $p_{II(0)} = P(1+q)$ über, nach I wird $p_{eI(0)} = Pq$ reflektiert. $p_{II(0)}$ gelangt z. Z. $t_1 = l_{II}/v_{II}$ an das offene Ende von Leitung II und wird mit gleichem Vorzeichen reflektiert, so daß auf II sich eine nach a zurückwandernde Welle $p_{eII(0)} = p_{II(0)}$ überlagert. In derselben Zeit ist auf Leitung I $p_{eI(0)}$ nach dem Anfang gewandert und wird, da dort die Spannung konstant ist, mit umgekehrtem Vorzeichen reflektiert. Sind die Laufzeiten für beide Leitungen, d. h. die reduzierten Längen, gleich, so trifft die am Anfang von I reflektierte Welle $p_{I(0)} = -p_{eI(0)} = -Pq$ mit der am Ende von II reflektierten $p_{eII(0)}$ gleichzeitig in a ein. Die nun entstehenden Wellen $p_{II(1)}$ und $p_{eI(1)}$ berechnen sich nach den Gl. 422 S. 321 und das Spiel wiederholt sich jeweils nach der Zeit $2t_1$. Die aufeinanderfolgenden Werte der von der Übergangsstelle ausgehenden Wellen $p_{II(n)}$ und $p_{eI(n)}$ könnten durch Potenzen von q ausgedrückt werden; für die Auswertung einfacher ist folgender Weg.

Nach n Hin- und Herläufen wird nach Gl. 422

$$\left. \begin{aligned} p_{eI(n)} &= qp_{I(n-1)} + (1-q)p_{eII(n-1)} \\ p_{II(n)} &= -qp_{eII(n-1)} + (1+q)p_{I(n-1)} \end{aligned} \right\} \dots (429)$$

Hierin ist wegen der Reflexion an den Leitungsenden

$$\left. \begin{aligned} p_{I(n-1)} &= -p_{eI(n-1)} \text{ und } p_{eII(n-1)} = p_{II(n-1)} \\ p_{eI(n)} &= -qp_{eI(n-1)} + (1-q)p_{II(n-1)} \\ p_{II(n)} &= -qp_{II(n-1)} - (1+q)p_{eI(n-1)} \end{aligned} \right\} \dots (429a)$$

¹⁾ Arch. f. El., Bd. I, S. 283.

Die Lösung dieser linearen Differenzgleichungen ist

$$p_{eI(n)} = A e^{j\alpha n}, \quad p_{II(n)} = B e^{j\alpha n}, \quad \dots \quad (430)$$

worin A , B und α zu bestimmende Konstanten sind. Setzt man (430) in (429a) ein und dividiert durch $e^{j\alpha(n-1)}$, so wird

$$\left. \begin{aligned} A[\cos \alpha + j \sin \alpha + q] &= (1 - q)B \\ B[\cos \alpha + j \sin \alpha + q] &= -(1 + q)A \end{aligned} \right\} \dots \dots (431)$$

Durch Division der beiden Gleichungen wird zunächst

$$B = jA \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} \dots \dots \dots (432)$$

und damit in (431)

$$\cos \alpha = -q \dots \dots \dots (433)$$

Dieser Bedingung genügen zwei Werte $\pm \alpha$, daher hat die Lösung (430) zwei Glieder. Mit Rücksicht auf (432) wird

$$\left. \begin{aligned} p_{eI(n)} &= A_1 e^{j\alpha n} + A_2 e^{-j\alpha n} \\ &= (A_1 + A_2) \cos n\alpha + j(A_1 - A_2) \sin n\alpha \\ p_{II(n)} &= B_1 e^{j\alpha n} + B_2 e^{-j\alpha n} \\ &= \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} [- (A_1 + A_2) \sin n\alpha + j(A_1 - A_2) \cos n\alpha] \end{aligned} \right\} \dots (434)$$

Nun ist für $n=0$

$$p_{eI(0)} = Pq = A_1 + A_2$$

$$p_{II(0)} = P(1+q) = j(A_1 - A_2) \sqrt{\frac{1+q}{1-q}}$$

und hiermit endlich

$$\left. \begin{aligned} p_{eI(n)} &= P[q \cos n\alpha + \sqrt{(1+q)(1-q)} \sin n\alpha] \\ p_{II(n)} &= P[(1+q) \cos n\alpha - q \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} \sin n\alpha] \end{aligned} \right\} \dots (435)$$

worin α durch Gl. 433 bestimmt ist.

Am Leitungsende II war z. Z. t_1 $p_{II(0)}$ eingetroffen und mit gleichem Vorzeichen reflektiert worden, es herrscht dort bis z. Z. $3t_1$ die Spannung $2p_{II(0)}$, dann trifft $p_{II(1)}$ ein, von $3t_1$ bis $5t_1$ herrscht dort $2[p_{II(0)} + p_{II(1)}]$ usf.

Fig. 225a und b zeigen den zeitlichen Verlauf der Spannungen am Ende der zweiten Leitung ohne Berücksichtigung der Dämpfung für zwei Fälle. Bei 225a ist Leitung I ein Kabel, II eine Freileitung, bei 225b ist es umgekehrt. Dabei ist

für Fig. 225a $Z_I:Z_{II} = 1:10$, $\cos \alpha = -q = -0,818$ $\alpha \cong 145^\circ$
 " " 225b $Z_I:Z_{II} = 10:1$, $\cos \alpha = -q = +0,818$ $\alpha \cong 35^\circ$

Die Spannungssprünge folgen sich in Abständen der doppelten Laufzeit ($2t_1$) über eine Leitungslänge, sie ergeben periodische Schwingungen entsprechend der periodischen Wiederkehr der Funktionen in Gl. 435. Durch die Dämpfung werden sie allmählich verkleinert und schmiegen sich dem Endwert P immer mehr an.

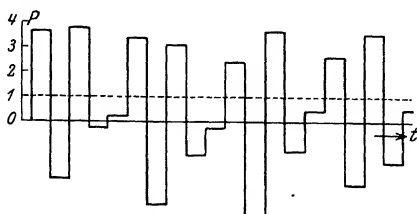


Fig. 225 a.

Am größten werden die Resonanzschwingungen am Ende der kurzen Freileitung, die an ein Kabel anschließt (225 a), aber auch bei dem

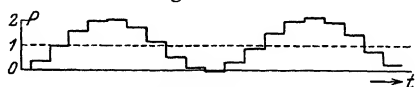


Fig. 225 b.

Kabel steigen sie auf den doppelten Wert der Einschaltspannung, obwohl der erste Ladestoß nur klein ist.

95. Widerstand, Induktivität und Kapazität an der Übergangsstelle von zwei Leitungen.

1. Widerstand R_0 zwischen zwei Leitungen.

Sind zunächst wie früher φ_I , ϱ_I , φ_{II} , ϱ_{II} die Momentanwerte der Wellen auf den Leitungen I und II an der Übergangsstelle, so ist für die freien Schwingungen an dieser Stelle

$$\begin{aligned} i_{fI} &= i_{fII}, \\ p_{fI} &= p_{fII} + i_f R_0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_I - \varrho_I}{Z_I} &= \frac{\varphi_{II} - \varrho_{II}}{Z_{II}}, \\ \varphi_I + \varrho_I &= \varphi_{II} + \varrho_{II} + \frac{\varphi_{II} - \varrho_{II}}{Z_{II}} R_0. \end{aligned}$$

Betrachtet man wieder φ_I und ϱ_{II} als gegeben, so wird

$$\left. \begin{aligned} \varrho_I &= \varphi_I \frac{Z_{II} - Z_I + R_0}{Z_I + Z_{II} + R_0} + \varrho_{II} \frac{2Z_I}{Z_I + Z_{II} + R_0} \\ \varphi_{II} &= \varrho_{II} \frac{Z_I - Z_{II} + R_0}{Z_I + Z_{II} + R_0} + \varphi_I \frac{2Z_{II}}{Z_I + Z_{II} + R_0} \end{aligned} \right\} \quad (436)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \varrho_I &= \varphi_I q_I + \varrho_{II} (1 - q_I) \\ \varphi_{II} &= -\varrho_{II} q_{II} + \varphi_I (1 + q_{II}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (437)$$

worin

$$q_I = \frac{Z_{II} - Z_I + R_0}{Z_I + Z_{II} + R_0}, \quad -q_{II} = \frac{Z_I - Z_{II} + R_0}{Z_I + Z_{II} + R_0}. \quad (438)$$

Der Reflexionsfaktor q_I von Leitung I nach II ergibt sich aus dem ohne Widerstand (s. Gl. 421 a und b), wenn statt Z_{II} die Summe $Z_{II} + R_0$ gesetzt wird, und $-q_{II}$ von Leitung II nach I, wenn $Z_I + R_0$ statt Z_I gesetzt wird. Der Widerstand wirkt bei der Reflexion an jeder Leitung so, als ob die Charakteristik der folgenden Leitung um R_0 vergrößert wäre.

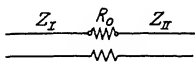


Fig. 226.

Schalter mit Widerstandsstufe. Leitung I hat die Spannung P , Leitung II wird über den Widerstand eingeschaltet. Wie auf S. 324 wird $\varphi_I = 0$, $\varrho_{II} = -\frac{1}{2}P$.

Die in Leitung II einziehende Spannungswelle ist

$$p_{II} = P + \varphi_{II} + \varrho_{II} = \frac{1}{2}P(1 + q_{II}) = P \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II} + R_0}, \quad (439)$$

die in I zurücklaufende Schaltwelle

$$\varrho_I = -\frac{1}{2}P(1 - q_I) = -P \frac{Z_I}{Z_I + Z_{II} + R_0}, \quad (440)$$

der Strom ist

$$\frac{\varphi_I - \varrho_I}{Z_I} = \frac{\varphi_{II} - \varrho_{II}}{Z_{II}} = \frac{P}{Z_I + Z_{II} + R_0}.$$

Gegenüber den Gl. 423 und 424 zeigt sich die Verkleinerung der Schaltwellen durch die Widerstandsstufe. Nur ist darauf zu achten, daß beim Kurzschließen des Widerstandes nicht größere Schaltwellen entstehen.

Ist z. B. die Leitung II offen, J_0 ihr Ladestrom, so wird bei der zweiten Schaltstufe die Spannung $J_0 R_0$ auf Leitung II geschaltet. Dabei wird die rückläufige Schaltwelle nach Gl. 423 S. 324

$-J_0 R_0 \frac{Z_I}{Z_I + Z_{II}}$. Soll sie gleich der zuerst auftretenden (Gl. 440) sein, so wird

$$P \frac{Z_I}{Z_I + Z_{II} + R_0} = J_0 R_0 \frac{Z_I}{Z_I + Z_{II}},$$

woraus R_0 berechnet werden kann¹⁾.

Trifft eine resultierende Wanderwelle von der Höhe p_I , aus Leitung I kommend, auf den Widerstand, so erhält man die reflektierte p_{eI} und die übertretende p_{II} , wenn in Gl. 436 $\varrho_{II} = 0$ gesetzt wird

$$p_{eI} = p_I q_I = p_I \frac{Z_{II} + R_0 - Z_I}{Z_I + Z_{II} + R_0}$$

$$p_{II} = p_I(1 + q_{II}) = p_I \frac{2Z_{II}}{Z_I + Z_{II} + R_0}$$

$$i = \frac{p_{II}}{Z_{II}} = \frac{2p_I}{Z_I + Z_{II} + R_0}.$$

¹⁾ s. Rüdenberg, Elektrot. u. Maschinenbau 1912, Heft 8.

Die übertretende und die reflektierte Spannung werden gleich groß, wenn $R_0 = Z_I + Z_{II}$ ist. Für diesen Wert wird die im Widerstand vernichtete Leistung $i^2 R_0$ ein Maximum.

2. Eine Induktivität L_0 in Reihe mit zwei Leitungen.

Da die Induktivität ihre magnetische Energie nicht plötzlich ändern kann, verhindert sie den sprunghaften Übertritt einer Welle von einer Leitung zur anderen¹⁾. Sie ist der Grenzfall eines Zwischenstückes (s. S. 326) von der Länge 0 und mit $Z = \infty$. Wir untersuchen den Übergang einer auf Leitung I ankommenden Welle p_I . Es ist

$$i = \frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} = \frac{p_{II}}{Z_{II}}$$

$$p_I + p_{eI} = p_{II} + \frac{L_0}{Z_{II}} \frac{dp_{II}}{dt}$$

Eliminiert man p_{eI} , so wird

$$\frac{dp_{II}}{dt} + p_{II} \frac{Z_I + Z_{II}}{L_0} = 2 p_I \frac{Z_{II}}{L_0}$$

Ist p_I konstant (Rechteckwelle), so ist die Lösung

$$p_{II} = p_I \frac{2 Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} + k e^{-\frac{Z_I + Z_{II}}{L_0} t}$$

Da für $t=0$, $i=0$ und $p_{II}=0$ ist, wird mit $\frac{Z_I + Z_{II}}{L_0} = \zeta$,

$$p_{II} = p_I \frac{2 Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} (1 - e^{-\zeta t}) \quad \dots \quad (441)$$

Der Strom i und die reflektierte Spannung sind

$$i = \frac{p_{II}}{Z_{II}} = \frac{2 p_I}{Z_I + Z_{II}} (1 - e^{-\zeta t}) \quad \dots \quad (442)$$

$$p_{eI} = p_I - i Z_I = p_I \left[1 - \frac{2 Z_I}{Z_I + Z_{II}} (1 - e^{-\zeta t}) \right] \quad \dots \quad (443)$$

Nach einer Zeit t , in der p_{eI} um $-x_I = v_I t$ in Leitung I, p_{II} um $x_{II} = v_{II} t$ in Leitung II gewandert ist, ergibt sich das räumliche Bild Fig. 227. Der Übertritt nach Leitung II erfolgt allmählich nach einer Exponentialkurve, sie ist der Grenzfall des nach einer geometrischen Reihe abgestuften Wellenkopfes in Fig. 223. Die nach I zurückgeworfene Welle beginnt mit einem Spannungssprung in voller Höhe, der sich über die einfallende Spannung lagert.

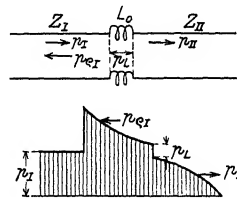


Fig. 227.

Das größte Spannungsgefälle in der Leitung II liegt bei $t=0$.

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial x} = \frac{\partial p_{II}}{\partial t} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_{II}} \frac{\partial p_{II}}{\partial t} = \frac{2 p_I Z_{II}}{v_{II} L_0} e^{-\zeta t}$$

¹⁾ s. Pfiffner, Elektrot. u. Maschinenbau 1912 Heft 47

Für $t=0$ ist, da $\frac{Z_{II}}{v_{II}} = L_{II}$ die Induktivität der Leitung pro km ist,

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial x}(\max) = 2 p_I \frac{L_{II}}{L_0} \dots \dots \dots (444)$$

Eine Energieabsorption findet in der Drosselspule nicht statt; die von der ankommenden Welle mitgeführte Leistung tritt zum Teil auf Leitung II über, zum Teil wird sie nach Leitung I reflektiert, ein weiterer Teil dient zur Ladung des magnetischen Feldes der Drosselspule. Nach dem Ablauf der Welle entladet sich die Drosselspule in die beiden Leitungen. Die Energie wird nur durch die Verluste verzehrt.

Eine gewisse Energieabsorption kann durch Überbrückung der Drosselspule durch einen Widerstand R_0 erzielt werden; er soll den stationären Strom nicht wesentlich beeinflussen, sondern hauptsächlich die freien Schwingungen hindurchlassen. Für die Teilströme i_R und i_L ist bei Parallelschaltung

$$i_R R_0 = L_0 \frac{di_L}{dt}.$$

Eine Welle p_I auf Leitung I treffe zur Zeit $t=0$ ein. Hier ist

$$p_I + p_{eI} = p_{II} + L_0 \frac{di_L}{dt}$$

$$i = \frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} = \frac{p_{II}}{Z_{II}} = i_L + i_R = i_L + \frac{L_0}{R_0} \frac{di_L}{dt}.$$

Durch Elimination von p_{II} und p_{eI} wird

$$\frac{di_L}{dt} + i_L \frac{R_0}{L_0} \cdot \frac{Z_I + Z_{II}}{R_0 + Z_I + Z_{II}} = \frac{2p_I}{L_0} \cdot \frac{R_0}{R_0 + Z_I + Z_{II}}$$

$$i_L = \frac{2p_I}{Z_I + Z_{II}} + k e^{-\zeta t},$$

worin

$$\zeta = \frac{R_0}{L_0} \frac{Z_I + Z_{II}}{R_0 + Z_I + Z_{II}} \dots \dots \dots (445)$$

Da für $t=0$ $i_L=0$ ist, wird

$$i_L = \frac{2p_I}{Z_I + Z_{II}} (1 - e^{-\zeta t}) \dots \dots \dots (446)$$

$$i_R = \frac{L_0}{R_0} \frac{di_L}{dt} = \frac{2p_I}{R_0 + Z_I + Z_{II}} e^{-\zeta t} \dots \dots \dots (447)$$

$$p_{II} = (i_L + i_R) Z_{II} = 2p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} (1 - e^{-\zeta t}) + 2p_I \frac{Z_{II}}{R_0 + Z_I + Z_{II}} e^{-\zeta t} \quad (448)$$

$$p_{eI} = p_I - p_{II} \frac{Z_I}{Z_{II}} = p_I - \frac{2p_I Z_I}{Z_I + Z_{II}} (1 - e^{-\zeta t}) - \frac{2p_I Z_I}{R_0 + Z_I + Z_{II}} e^{-\zeta t} \quad (449)$$

Für $t=0$ wird

$$p_{II} = 2 p_I \frac{Z_{II}}{R_0 + Z_I + Z_{II}}, \quad p_{eI} = p_I \frac{R_0 + Z_{II} - Z_I}{R_0 + Z_I + Z_{II}}.$$

Im ersten Augenblick wirkt nur der Widerstand, p_{II} und p_{eI} sind ebenso groß, wie wenn der Widerstand allein vorhanden wäre.

Die im Widerstand verzehrte Leistung ist

$$i_R^2 R_0 = 4 p_I^2 \frac{R_0}{(R_0 + Z_I + Z_{II})^2} e^{-2\zeta t}.$$

Sie ist im ersten Augenblick am größten und hat ein Maximum für $R_0 = Z_I + Z_{II}$. Mit diesem Wert würden aber für $t=0$ die übertretende und die reflektierte Spannung noch halb so groß wie beim direkten Übertritt von Leitung I auf II.

Über die mögliche Energieverzerung gibt folgende Rechnung ein Bild. Die eintreffende Welle habe eine Länge l km; ihre Wandergeschwindigkeit ist v_I km/sek⁻¹, die Dauer ihres Auftreffens

$t_1 = \frac{l}{v_1}$ sek, und die gesamte Energie

$$A = \frac{p_I^2 l}{Z_I v_I} \text{ Wattsekunden.}$$

Im Widerstand wird während des Eintreffens der Welle vernichtet

$$A'_R = \int_0^{t_1} i_R^2 R_0 dt = \frac{2 p_I^2 L_0}{(R_0 + Z_I + Z_{II})(Z_I + Z_{II})} (1 - e^{-2\zeta t_1}).$$

Nach dem Ablauf der Welle entladet sich die Drosselspule von ihrem Anfangsstrom (entsprechend Gl. 446 für $t=t_1$) in den Widerstand und die Leitungen. Die hierbei im Widerstand verzehrte Energie ist

$$A_E'' = A_E' (1 - e^{-2\zeta t_1}).$$

Vernachlässigt man $e^{-2\zeta t_1}$ gegen 1, so ist angenähert

$$\frac{A_E}{A} = \frac{A'_R + A_E''}{A} \simeq \frac{4 L_0 Z_I}{(R_0 + Z_I + Z_{II})(Z_I + Z_{II})} \frac{v_I}{l}.$$

Ist z. B. $Z_I = Z_{II}$, $R_0 = Z_I + Z_{II}$, so wird der Ausdruck $\frac{L_0 v_I}{2 Z_I l}$.

Für eine Freileitung ist $v_I = 3 \cdot 10^5$ km/sek⁻¹, $Z_I \simeq 600$. Für $L_0 = 10^{-8}$ Henry, $l = 1$ km wird das Absorptionsverhältnis 25 %/0. Die Wirk-samkeit ist also nicht sehr groß und nimmt ab, wenn zur Verkleine-rung des übertretenden Spannungsstoßes R_0 größer gewählt wird als hier angenommen.

3. Ein Kondensator C_0 parallel zu den Leitungen.

Ein Kondensator gestattet keine sprungweise Änderung seiner Spannung und verhindert ebenfalls den Übertritt eines Spannungs-

sprunges. Er ist der Grenzfall eines unendlich kurzen Zwischenstückes mit $Z=0$.

Ist wieder p_I die auf Leitung I ankommende Spannung, p_{eI} die reflektierte, p_{II} die übertretende, so ist (s. Fig. 228)

$$p_I + p_{eI} = p_{II},$$

für die Ströme gilt

$$i_I = i_{II} + i_c$$

$$\frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} = \frac{p_{II}}{Z_{II}} + C_0 \frac{dp_{II}}{dt}.$$

Eliminiert man p_{eI} , so wird

$$\frac{dp_{II}}{dt} + p_{II} \frac{Z_I + Z_{II}}{C_0 Z_I Z_{II}} = \frac{2 p_I}{C_0 Z_I}.$$

$$p_{II} = 2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} (1 - e^{-\zeta t}) \quad (450)$$

$$\zeta = \frac{Z_I + Z_{II}}{C_0 Z_I Z_{II}} \quad (451)$$

$$p_{eI} = p_{II} - p_I = -p_I + p_I \frac{2 Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} (1 - e^{-\zeta t}) \quad (452)$$

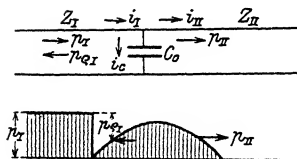


Fig. 228.

Fig. 228 zeigt die entstehenden Spannungen. In Leitung II tritt der, wie bei einer Drosselspule, abgeflachte Wellenkopf p_{II} über, in Leitung I wandert der volle Spannungssprung, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen, zurück.

Das größte Spannungsgefälle in Leitung II ist am Wellenkopf

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial x} (max) = \frac{1}{v_{II}} \frac{\partial p_{II}}{\partial t (t=0)} = \frac{2 p_I}{C_0 Z_I v_{II}} = \frac{2 p_I Z_{II}}{C_0 Z_I Z_{II} v_{II}}.$$

$\frac{1}{Z_{II} v_{II}} = C_{II}$ ist die Kapazität pro km der Leitung II, daher

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial x} (max) = 2 p_I \frac{Z_{II} C_{II}}{Z_I C_0} \quad (453)$$

Der Vergleich mit dem Spannungsgefälle hinter einer Drosselspule (Gl. 444) zeigt, daß Kondensator und Drosselspule gleichwertig sind, wenn die Beziehung besteht

$$\frac{L_0}{C_0} = Z_I \cdot Z_{II}.$$

Für $Z_I = Z_{II} = 600$ entspräche einem Kondensator von 0,01 Mfd $= 10^{-8}$ Farad in bezug auf das Spannungsgefälle eine Drosselspule von 3,6 Millihenry.

Auch der Kondensator verzehrt keine Energie, er wird von der einfallenden Welle geladen und gibt die Ladung nach dem Ablauf der Welle an die Leitungen zurück. Würde man zur Erzielung einer Energieabsorption einen Widerstand in Reihe zum Kondensator schalten, so wird im ersten Augenblick ein Teil der Spannung auf den Widerstand und auf die zweite Leitung fallen (weil der Kondensator sich im ersten Augenblick wie ein Kurzschluß verhält), der andere Teil wird reflektiert. Der allmähliche Übertritt der Spannung geht verloren, die Reflexion auf die erste Leitung wird gemildert.

4. Kombination von Induktivität, Kapazität und Widerstand.

Die Aufgabe, sowohl einen stoßfreien Übertritt der Spannung in die zweite Leitung als auch eine allmähliche Reflexion in die erste Leitung zu erreichen, kann¹⁾ durch Vereinigung von Widerstand mit einer Drosselspule und einem Kondensator gelöst werden, s. Fig. 229a und b.

Die auf Leitung I ankommende Welle habe die Höhe p_I . Für die Schaltung 229a mit Widerstand in Reihe zum Kondensator ist

$$\left. \begin{aligned} i_c &= C_0 \frac{dp_c}{dt}, & i_c R_0 &= R_0 C_0 \frac{dp_c}{dt}, & i_L &= \frac{p_{II}}{Z_{II}}, \\ p_I + p_{eI} &= p_c + R_0 C_0 \frac{dp_c}{dt} = \frac{L_0}{Z_{II}} \frac{dp_{II}}{dt} + p_{II} \\ \frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} &= C_0 \frac{dp_c}{dt} + \frac{p_{II}}{Z_{II}} \end{aligned} \right\} \quad (454)$$

Für $t=0$ ist $p_c=0$ und $p_{II}=0$, da die Drosselspule den Eintritt in die zweite Leitung verhindert, daher wird für den ersten Augenblick

$$p_I + p_{eI} = R_0 C_0 \frac{dp_c}{dt}$$

$$\frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} = C_0 \frac{dp_c}{dt},$$

und es wird $p_{eI}=0$, wenn $R_0=Z_I$ ist.

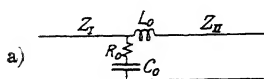
Analog haben wir bei der zweiten Schaltung (Fig. 229b) für eine auf Leitung I ankommende Welle p_I

$$p_I + p_{eI} = L_0 \frac{di_L}{dt} + p_{II}$$

$$\frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} = i_L + i_R = i_L + \frac{L_0}{R_0} \frac{di_L}{dt}.$$

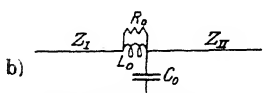
¹⁾ Nach Rüdenberg, ETZ 1913, S. 571.

Für $t=0$ ist $p_c = p_H = 0$, und $i_L = 0$, daher



$$p_I + p_{eI} = L_0 \frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} = \frac{L_0}{R_0} \frac{di_L}{dt},$$



daher $p_{eI} = 0$, wenn $R_0 = Z_I$ ist.

Der Vorgang läßt sich nun wie folgt untersuchen, z. B. für Schaltung 229 a.

Aus Gl. 454 ergibt sich nach p_c geordnet

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_c}{dt^2} + \frac{dp_c}{dt} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{1}{C_0(R_0 + Z_I)} + \frac{R_0 Z_I}{L_0(R_0 + Z_I)} \right] + p_c \frac{Z_I + Z_{II}}{C_0 L_0 (R_0 + Z_I)} \\ = \frac{2 p_I Z_{II}}{C_0 L_0 (R_0 + Z_I)} + \frac{2 dp_I}{dt} \frac{1}{C_0 (R_0 + Z_I)}. \end{aligned}$$

Setzen wir gleich den Wert $R_0 = Z_I$ ein und betrachten eine Welle konstanter Höhe p_I , für die $\frac{dp_I}{dt} = 0$ ist, so wird

$$\frac{d^2 p_c}{dt^2} + \frac{dp_c}{dt} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{Z_I}{2L_0} + \frac{1}{2C_0 Z_I} \right] + p_c \frac{Z_I + Z_{II}}{2C_0 L_0 Z_I} = p_I \frac{Z_{II}}{L_0 C_0 Z_I},$$

deren Lösung ist

$$p_c = 2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} + k_1 e^{\gamma_1 t} + k_2 e^{\gamma_2 t}$$

worin

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{Z_I}{2L_0} + \frac{1}{2C_0 Z_I} \right] \\ \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{Z_I}{2L_0} + \frac{1}{2C_0 Z_I} \right]^2 - \frac{Z_I + Z_{II}}{2L_0 C_0 Z_I}}. \end{aligned}$$

Sind die Wurzeln reell, so ist die Ladung aperiodisch, sind sie imaginär, so ist sie oszillierend.

Im ersten Fall erhalten wir folgende Bestimmung der Konstanten. Für $t=0$ ist $p_c = 0$, und infolge der gewählten Größe von R_0 auch $p_{eI} = 0$. Die erste Bedingung liefert

$$k_1 + k_2 = -2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}}.$$

Die zweite ergibt, da nach der ersten der beiden Gl. 454

$$\begin{aligned} p_{eI} = -p_I + p_c + R_0 C_0 \frac{dp_c}{dt} \\ 0 = -p_I + C_0 Z_I (\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2). \end{aligned}$$

Mithin

$$k_2 = -\frac{p_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{1}{C_0 Z_I} + \frac{2 \gamma_1 Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} \right]$$

$$k_1 = \frac{p_I}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{1}{C_0 Z_I} + \frac{2 \gamma_3 Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} \right].$$

Bei oszillierendem Übergang kann man setzen

$$\frac{1}{2} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{Z_I}{2 L_0} + \frac{1}{2 C_0 Z_I} \right] = \alpha$$

$$\sqrt{\frac{Z_I + Z_{II}}{2 L_0 C_0 Z_I} - \frac{1}{4} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{Z_I}{2 L_0} + \frac{1}{2 C_0 Z_I} \right]^2} = \beta.$$

$$p_e = 2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} + A \sin(\beta t + \delta) e^{-\alpha t}.$$

Hierin wird, da für $t=0$ $p_e=0$,

$$A \sin \delta = -2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}}$$

und ferner für $t=0$ $R_0 C_0 \frac{dp_e}{dt} = p_I$

$$-\alpha A \sin \delta + \beta A \cos \delta = \frac{p_I}{C_0 Z_I}$$

$$A \cos \delta = \frac{p_I}{\beta C_0 Z_I} + \frac{\alpha}{\beta} A \sin \delta = \frac{p_I}{\beta C_0 Z_I} - \frac{\alpha}{\beta} 2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}},$$

daher ist

$$A = \sqrt{(A \cos \delta)^2 + (A \sin \delta)^2} \quad \text{und} \quad \delta = \arctg \frac{A \sin \delta}{A \cos \delta}$$

bestimmt.



Fig. 230.

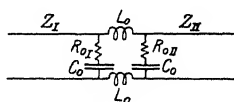


Fig. 231.

In Fig. 230 ist der Verlauf der Spannungen für $Z_I = Z_{II} = R_0 = 500 \text{ Ohm}$, $C_0 = 0,01 \mu F = 10^{-8} \text{ F}$, $L = 10^{-3} \text{ Henry}$ aufgetragen. Der Vorgang ist dabei aperiodisch.

Damit eine derartige Vorrichtung auch gegenüber Wellen wirkt, die von der zweiten Leitung kommen, ist sie sinngemäß symmetrisch anzuordnen, wie z. B. Fig. 231 zeigt. Jeder Widerstand soll gleich der Charakteristik der ihm benachbarten Leitung sein.

96. Verzernte Wellen.

Die bisher verwendete Darstellung der freien Schwingungen durch unverzerrt fortschreitende Wellen reicht zur Erklärung der meisten bei Starkstromleitungen interessierenden Erscheinungen aus. Denn hier bieten die freien Schwingungen nur so lange Interesse, als sie durch die Dämpfung nur wenig abgeschwächt sind, d. h. bei verhältnismäßig kurzen Leitungen, wo dann auch die Verzerrung der Wellen keine wesentliche Rolle spielt.

Wo die Verzerrung von Bedeutung ist, wie bei langen Leitungen zur Nachrichtenübermittlung, lassen sich die Vorgänge durch eine Reihe von Sinuswellen darstellen.

Ohne auf die vollständige Behandlung einzugehen, soll dies an einigen ganz einfachen Beispielen erläutert werden.

1. Leitung mit Widerstand und Kapazität.

Nach W. Thomson kann man bei einem Telegraphenkabel in erster Annäherung Selbstinduktion und Ableitung vernachlässigen. Dieser Fall gibt einen Grenzfall der Verzerrung, denn von den beiden Verhältnissen, deren Gleichheit die Verzerrungsfreiheit bedingt, wird das eine ($R:L$) unendlich, das andere ($A:C$) Null. Die Grundgleichungen lauten hier

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = Ri, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial p}{\partial t} \quad \dots \quad (455)$$

und nochmals nach x differenziert

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = RC \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RC \frac{\partial i}{\partial t} \quad \dots \quad (455a)$$

Macht man für p den Ansatz

$$p = f(x)e^{-\alpha t}, \quad \dots \quad (456)$$

so wird (455a)

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -\alpha RC f(x) = -b^2 f(x), \quad \dots \quad (457)$$

wobei abgekürzt gesetzt ist

$$b^2 = \alpha RC \quad \dots \quad (457a)$$

Eine Lösung von (457) ist, wie man durch Differentiation erkennt,

$$f(x) = A \sin bx + B \cos bx, \quad \dots \quad (458)$$

worin A und B Konstante sind. b ist das Winkelmaß der räumlichen Welle, das mit dem zeitlichen Dämpfungsfaktor α durch Gl. 457a verknüpft ist. Da Gl. 458 für irgendeinen Wert von b erfüllt wird, so wird sich das Integral durch eine Reihe von Gliedern der Form (458) darstellen lassen, bei denen jedem Werte b_n andere

Amplituden A_x und B_x entsprechen. Nach (456) gilt daher für die Spannung

$$p = \Sigma e^{-\frac{b_x^2}{R^2 C} t} [A_x \sin b_x x + B_x \cos b_x x] \quad . \quad (459)$$

und nach Gl. 455 für den Strom

$$i = -\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial x} = \Sigma e^{-\frac{b_x^2}{R^2 C} t} \frac{b_x}{R} [-A_x \cos b_x x + B_x \sin b_x x] \quad . \quad (459 a)$$

Diese Gleichungen gelten für die freien und die erzwungenen Schwingungen. Wir können nun wieder die freien Schwingungen für sich behandeln und legen für sie die Gleichungen zugrunde.

a) Beim Einschalten eines Kabels am Leitungsanfang ist dort die Spannung erzwungen, die freie Spannung dauernd Null. Damit für $x=0$, der Ausdruck (459) für alle Zeiten verschwindet, müssen alle B_x Null sein. Für die freien Schwingungen beim Einschalten gilt daher

$$\left. \begin{aligned} p_f &= \Sigma e^{-\frac{b_x^2}{R^2 C} t} A_x \sin b_x x \\ i_f &= -\Sigma e^{-\frac{b_x^2}{R^2 C} t} \frac{b_x}{R} A_x \cos b_x x \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (460)$$

b) Das Einschalten mit Gleichstrom bei offenem Leitungsende. Hier ist der Strom für $x=l$ dauernd Null, daher nach (460) $\cos b_x l$ gleich Null, was erfüllt ist, wenn

$$b_x l = (2x-1) \frac{\pi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad ; \quad . \quad . \quad (461)$$

ist, wo $x=1, 2, 3 \dots$ alle Zahlenwerte durchläuft.

Die Wellenlänge λ ist, da $b_x \lambda = 2\pi$,

$$\lambda = \frac{2\pi}{b_x} = \frac{4l}{2x-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (462)$$

für die Grundwelle ($x=1$) ist sie die vierfache Leitungslänge. Zur Bestimmung der Amplituden A_x dienen die Grenzbedingungen für $t=0$. Der Anfangswert der Spannung ist Null, der Endwert $p_{e(0)} = P$, daher die freie Spannung für $t=0$

$$p_{f(0)} = -P = \sum_1^{\infty} A_x \sin(2x-1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{l}.$$

Die Amplituden der Fourierschen Reihe des Rechtecks mit der Höhe $-P$ sind nach Kap. VII. Gl. 95

$$A_x = -\frac{4}{\pi} \frac{P}{2x-1}.$$

Setzt man diesen Wert in Gl. 460 und addiert die stationäre Spannung P , so ist die resultierende Spannung beim Einschalten

$$p = P + p_f = P \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} e^{-\frac{(2\kappa-1)^2 \pi^2}{R_1 C_1} t} \frac{1}{2\kappa-1} \sin(2\kappa-1) \frac{\pi x}{2l} \right] \quad (463)$$

Da der stationäre Strom Null ist, wird

$$i = i_f = \frac{2P}{R_1} \sum_1^{\infty} e^{-\frac{(2\kappa-1)^2 \pi^2}{R_1 C_1} t} \cos(2\kappa-1) \frac{\pi x}{2l} \quad (463a)$$

Hierin ist $R_1 = Rl$, $C_1 = Cl$ gesetzt, R_1 und C_1 sind Widerstand und Kapazität des ganzen Kabels.

$R_1 C_1 = \tau$ ist die Zeitkonstante des Kabels.

Für ein Telegraphenkabel sei $R = 7 \text{ Ohm/km}$, $C = 0,2 \mu\text{F/km}$.

Einer Länge von 500 km entspricht eine Zeitkonstante $\tau = 0,35 \text{ Sek.}$

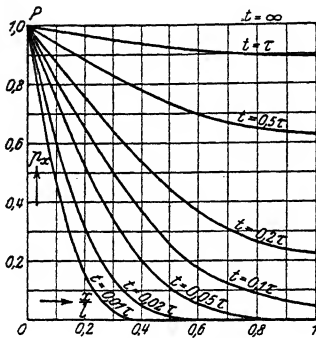


Fig. 232.

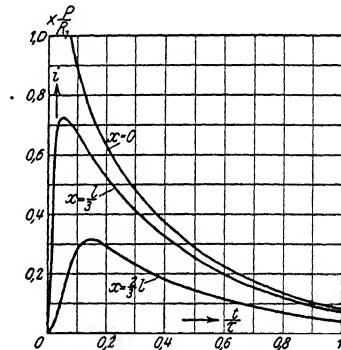


Fig. 233.

Fig. 232 zeigt die räumliche Spannungsverteilung längs des Kabels zu verschiedenen Zeiten nach dem Einschalten, Fig. 233 den zeitlichen Verlauf des Ladestromes an einigen Punkten des Kabels. Die Zeiten sind in Teilen der Zeitkonstante angegeben. Am Leitungsanfang ergibt Gl. 463a für $t=0$ den Strom unendlich, dies rührt von der Vernachlässigung des Widerstandes der Stromquelle her, dabei wirkt im ersten Augenblick die Kapazität des Kabels wie ein Kurzschluß.

c) Beim Einschalten bei kurzgeschlossenem Ende (etwa entsprechend dem Fall, daß der Widerstand des Stromempfängers vernachlässigt wird), ist die Spannung am Leitungsende ($x=l$) dauernd Null. Nach Gl. 460 wird daher $\sin b_\kappa l = 0$, hier gilt

$$b_\kappa l = \kappa\pi \quad (464)$$

wo $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ wieder alle Zahlenwerte annimmt. Die Wellenlänge ist hier

$$\lambda = \frac{2\pi}{b_\kappa} = \frac{2l}{\kappa} \quad (465)$$

Für die Grundwelle ($\kappa=1$) ist sie die doppelte Leitungslänge. Die stationären Werte sind hier

$$p_{e(0)} = P \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad i_{e(0)} = \frac{P}{R_1},$$

für die freie Spannung ist daher für $t=0$

$$p_{f(0)} = -P \left(1 - \frac{x}{l}\right) = \sum_1^{\infty} A_{\kappa} \sin \kappa \pi \frac{x}{l}.$$

Die Amplituden der Fourierschen Reihe erhält man nach Kap. VII.

$$A_{\kappa} = \frac{2}{l} \int_0^l -P \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \left(\kappa \pi \frac{x}{l}\right) dx = -\frac{2}{\pi} \frac{P}{\kappa}$$

und hiermit Strom und Spannung beim Einschalten

$$\left. \begin{aligned} p &= P \left(1 - \frac{x}{l}\right) + p_f = P \left[1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} e^{-\frac{\kappa^2 \pi^2}{R_1 C_1} t} \frac{1}{\kappa} \sin \left(\kappa \pi \frac{x}{l}\right)\right] \\ i &= \frac{P}{R_1} + i_f = \frac{P}{R_1} \left[1 + 2 \sum_1^{\infty} e^{-\frac{\kappa^2 \pi^2}{R_1 C_1} t} \cos \left(\kappa \pi \frac{x}{l}\right)\right] \end{aligned} \right\} (466)$$

Fig. 234 zeigt wieder die Spannungsverteilung längs des Kabels zu verschiedenen Zeiten und Fig. 235 den zeitlichen Verlauf des Stromes an verschiedenen Punkten.

Zur Berechnung der Vorgänge eignet sich für die hier vorliegenden

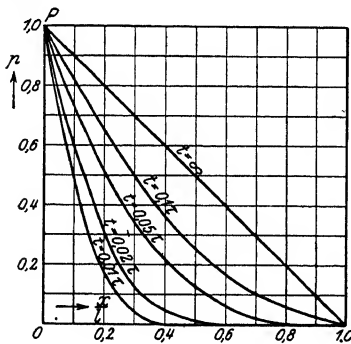


Fig. 234.

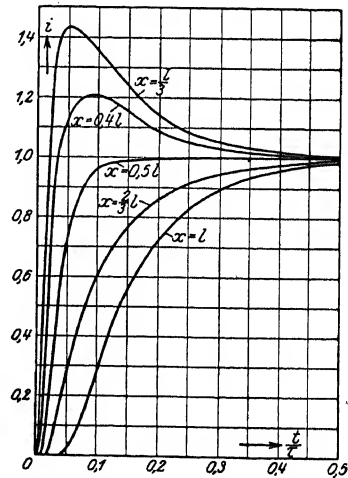


Fig. 235.

Aufgaben besonders auch die symbolische Darstellung der freien Schwingungen und die Bestimmung der Amplituden nach dem Satz von Heaviside (s. Kap. XIII S. 279), wofür im folgenden ein Beispiel gezeigt werden soll.

2. Die Ersatzschaltung einer Spule mit Windungskapazität¹⁾.

Das Verhalten dieses Stromkreises (Fig. 168 S. 218) im stationären Zustand ist in Kap. XI S. 218 erörtert worden. Hier untersuchen wir die freien Schwingungen beim Laden mit konstanter Spannung P , was etwa dem Auftreffen einer Rechteckwelle auf die Spule entspricht.

Die Fortpflanzungskonstante ν ist nach Gl. 274 S. 218 für einen Vorgang nach dem Zeitgesetz $e^{\nu t}$, wenn γ statt $j\omega$ gesetzt wird,

$$\nu = \sqrt{\frac{LC\gamma^2}{1 + KL\gamma^2}} \quad \dots \quad (467)$$

C ist die Kapazität gegen Erde für die Längenheit, K ebenso die Windungskapazität.

a) Ist das Ende der Spule isoliert, so ist die Spannungsverteilung nach Gl. 277 S. 219 für konstante Spannung P

$$p_x = P \frac{\operatorname{Co}[\nu(l-x)]}{\operatorname{Co}[\nu l]} = \frac{P}{Z_{(\gamma)}} \quad \dots \quad (468)$$

$Z_{(\gamma)}$ ist der Operator für die freien Schwingungen und die Werte γ sind (s. S. 278) die Wurzeln der Gleichung $Z_{(\gamma)} = 0$. Nach (468) wird $Z_{(\gamma)} = 0$, wenn $\operatorname{Co}[\nu l] = 0$ ist. Die Fortpflanzungskonstante ν ist allgemein (s. S. 185) $\nu = a + jb$, worin a der räumliche Dämpfungsexponent, b das Winkelmaß ist. Hier ist $a = 0$, da wir die Verluste vernachlässigt haben, daher wird

$$\operatorname{Co}[\nu l] = \operatorname{Co}[jbl] = \cos bl = 0,$$

wenn

$$\nu_x l = j b_x l = j \frac{\pi}{2} (2x - 1) \quad \dots \quad (469)$$

ist, worin $x = 1, 2, 3 \dots$ alle Zahlenwerte annimmt.

Zur Bestimmung der Werte γ erhalten wir aus (467) und (469)

$$\gamma^2 = \frac{\nu^2}{LC \left(1 - \nu^2 \frac{K}{C}\right)}$$

$$\gamma_x = \pm j \frac{\frac{\pi}{2l}(2x-1)}{\sqrt{LC} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}(2x-1)^2 \frac{K}{l^2 C}}} = \pm j \beta_x \quad \dots \quad (470)$$

Die γ sind imaginär und bedeuten Kreisfrequenzen (β).

In dem Ausdruck (470) ist Cl die gesamte Kapazität des Stromkreises gegen Erde (da die Elementarkapazitäten C für die Längen-

¹⁾ s. K. W. Wagner, Elektrot. u. Maschinenbau 1915, Heft 8/9.

einheit parallel geschaltet sind) und $\frac{K}{l}$ die gesamte Windungskapazität zwischen den Enden (da die Elemente K in Reihe geschaltet sind). Das Verhältnis der gesamten Windungskapazität zur gesamten Erdkapazität setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{K}{l^2 C} = \delta.$$

δ ist eine kleine Zahl, während K viel größer ist als C .

Zwischen der Kreisfrequenz β_* nach (470) und dem Winkelmaß b_* besteht die Beziehung, wenn wir noch in (470) $\frac{1}{\sqrt{LC}} = v$ setzen,

$$\beta_* = \frac{b_* v}{\sqrt{1 + (b_* l)^2 \delta}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (471)$$

Der Grenzfall $\delta = 0$, d. h. $K = 0$, entspricht einer gestreckten Leitung, bei der wie hier die Verluste vernachlässigt sind.

Bei der Leitung wachsen die Eigenfrequenzen unbegrenzt mit κ , hier haben sie einen Grenzwert für $\kappa = \infty$

$$\beta_\infty = \frac{1}{\sqrt{LK}}.$$

Zur Bestimmung der Amplituden dient die Formel von Heaviside Gl. 368. S. 279

$$p_x = \frac{P}{Z_{(0)}} + \frac{P \sum e^{\gamma_\kappa t}}{\gamma_\kappa \left(\frac{dZ}{d\gamma} \right)}.$$

Für $\gamma = 0$ wird $Z_{(0)} = 1$, ferner ist $\gamma \frac{dZ}{d\gamma} = \gamma \frac{dZ}{d\nu} \frac{d\nu}{d\gamma}$.

Hierin wird nach (467) und (469)

$$\gamma_\kappa \left(\frac{d\nu}{d\gamma} \right) = \nu_\kappa \left(1 - \nu_\kappa^2 \frac{K}{C} \right) = j b_\kappa \left(1 + b_\kappa^2 \frac{K}{C} \right) = j b_\kappa (1 + (b_\kappa l)^2 \delta),$$

ferner, da $\Im \nu l = 0$ ist,

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\nu} &= -\frac{l}{\sin \nu_\kappa x} = -\frac{l}{\sin j b_\kappa x} = j \frac{l}{\sin b_\kappa x} \\ \gamma_\kappa \frac{dZ}{d\gamma} &= -\frac{b_\kappa l \{1 + (b_\kappa l)^2 \delta\}}{\sin b_\kappa x}. \end{aligned}$$

Ferner wird $e^{\gamma_\kappa t} = e^{+j\beta_\kappa t} + e^{-j\beta_\kappa t} = 2 \cos \beta_\kappa t$

$$p_x = P \left[1 - 2 \sum_1^\infty \frac{\sin b_\kappa x \cos \beta_\kappa t}{b_\kappa l \{1 + (b_\kappa l)^2 \delta\}} \right], \cdot \cdot \cdot \quad (472)$$

worin b_κ und β_κ aus (469) und (471) einzusetzen sind.

Der Zustand für $t=0$ ergibt sich aus (467) und (468) für $\gamma = \infty$

$$v_{\infty} = V \sqrt{\frac{C}{K}} = \frac{1}{l\sqrt{\delta}}$$

$$p_{x(0)} = P \frac{\operatorname{Erf} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \frac{l-x}{l}}{\operatorname{Erf} \frac{1}{\sqrt{\delta}}} \dots \dots \dots (473)$$

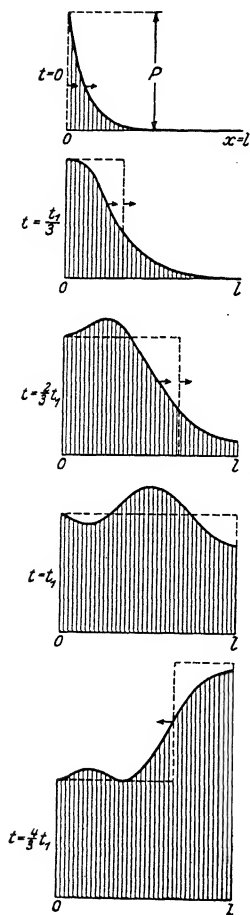


Fig. 236.

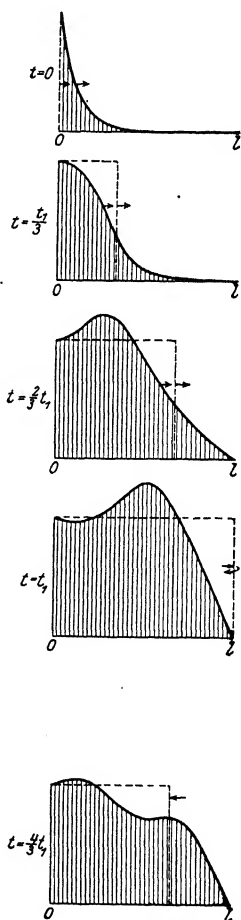


Fig. 237.

Die Spannungsverteilung stellt sich im ersten Augenblick nach Maßgabe der Kapazitäten C und K ein.

b) Ist das Ende der Spule geerdet, so ist

$$p_x = P \frac{\sin \nu(l-x)}{\sin \nu l} = \frac{P}{Z_{(v)}} \quad (474)$$

Hier wird $Z_{(v)} = 0$, wenn

$$\frac{\sin \nu l}{\sin \nu(l-x)} = \frac{\sin \nu l}{\sin \nu(l-x)} = 0$$

$$\nu_x l = j b_x l = j \pi, (475)$$

wo $x = 1, 2, 3, \dots$ usf. Ferner ist $Z_{(0)} = \frac{l}{l-x}$

$$\gamma_x = \pm j \beta_x = \pm j \frac{\pi x}{l} \frac{1}{\sqrt{LC} \sqrt{1 + \pi^2 x^2 \delta}} = \pm j \frac{b_x v}{\sqrt{1 + (b_x l)^2 \delta}} \quad . (476)$$

$$\gamma_x \frac{dZ}{d\gamma} = - \frac{b_x l \{1 + (b_x l)^2 \delta\}}{\sin b_x x}$$

$$p_x = P \left[1 - \frac{x}{l} - 2 \sum_1^{\infty} \frac{\sin b_k x \cos \beta_k t}{b_k l \{1 + (b_k l)^2 \delta\}} \right] \quad . . (477)$$

worin jetzt b_x und β_x nach (475) und (476) einzusetzen sind.

In Fig. 236 und 237 ist der Ladevorgang nach Gl. 472 und 477 für die Zeitpunkte $t_1 = 0, \frac{1}{3}t_1, \frac{2}{3}t_1, t_1, \frac{4}{3}t_1$, dargestellt. t_1 ist die Laufzeit der Grundwelle über die Leitungslänge. Sie ist bei Fig. 236 für isoliertes Leitungsende $\frac{1}{4}$ Periode der Grundfrequenz (β_1), bei Fig. 237 für geerdetes Ende $\frac{1}{2}$ Periode. In diesem Beispiel ist $\delta = 0,01$ angenommen.

Zum Vergleich sind die unverzerrt (und ungedämpft) fortschreitenden Rechteckwellen punktiert eingezeichnet, die dem Grenzfall $\delta = 0$ entsprechen. Die Wirkung der gegenseitigen Kapazität zeigt sich im wesentlichen in einer Milderung der steilen Wellenstirn.

Namen- und Sachregister.

Ableitung 183, 205.
Addition von einwelligen Strömen 6.
 — — — — graphische 27.
 — — — — in der symbolischen Darstellung 29.
 — — — — von mehrwelligen Strömen 91.
Admittanz 17.
Äquivalenter Sinusstrom 95.
 — **Magnetisierungsstrom** 166.
d'Alembert 295.
Amplitude 1.
Analyse von mehrwelligen Strömen 74.
 — — — — arithmetische 80.
 — — — — graphische 86.
Aperiodische Entladung 270.
Arbeitsdiagramm eines Stromkreises 235.
 — **des Induktionsmotors** 239.
Armagnat 93.
Arnold 39, 218.
Aron 125.
Arons 286.
Atmosphärische Entladung, freie Schwingungen bei 303, 308.
Ausgleichsvorgänge in quasistationären Stromkreisen 252.
 — **in nichtstationären Stromkreisen** 292.
Ausgleichsströme 252.
 — **symbolische Darstellung** der 277.
Ausschalten eines induktiven Stromkreises 286.
 — — **Kondensators** 291.
 — **einer Leitung** 309, 313.
Ausschalzeit 286.
Ausschaltspannung 290, 313, 315.
Ayrton 49.
Balancierte Mehrphasensysteme 104.
Behn-Eschenburg 125.
Belastungsänderung eines Stromkreises 231.
Betriebskonstanten von Mehrfachleitungen 205.
Blindleistung 18.
Blindleitwert 18.

Blindspannung 17.
Blindstrom 17.
Blindwiderstand 17.
Blondel 145.
Böhm 220.
Boucherot 65.
Breisig 190, 198, 204, 211, 214.
Breitfeld 204.
Brückenmethode zur Messung der Induktivität und Kapazität 60.
 — — — — **Leistung** 61.
 — — — — **gegenseitigen Induktion** 143.
Brückenschaltung, Berechnung einer 69.
Charakteristik einer Leitung 187, 189, 195, 199, 296.
 — **eines Kettenleiters** 215.
Dämpfungsfaktor 187, 254.
Deutsch 279.
Diagramme, allgemeine 34, 235.
 — **einer Arbeitsübertragung** 45.
 — **des Induktionsmotors** 239.
 — **von Leitungen** 190, 195, 199.
 — **des Transformators** 137, 165.
Dielektrizitätskonstante 19.
Diesselhorst 205.
Drehfeld 170.
 — **Energieübertragung** durch das 172.
Drehfeldmaschine 172.
Dreiamperemetermethode 56.
Dreieckschaltung 112.
Dreileitersystem 100.
 — **Zweiphasen-** 118.
Dreivoltmetermethode 49.
Dreiphasensystem 105.
 — **mit Nulleiter, Messung der Leistung** 126.
Durchflutungsgesetz 11.
Drosselspule, Verhalten bei freien Schwingungen 309, 333, 344.
Effektivwert eines einwelligen Stromes 7.
 — — **mehrwelligen Stromes** 88.

- Eigenfrequenz eines Schwingungskreises 269.
 — einer Leitung 298, 301, 306.
 — einer Spule 344.
 Einphasensystem mit Nulleiter 100.
 Einschalten eines Gleichstromes 255, 259.
 — Wechselstromes 257.
 — Kabels 341.
 — einer Leitung 296, 300.
 — eines Transformators 260, 284.
 Einwellige Wechselströme 1.
 Eisen, Magnetisierungskurve 153.
 Eisenbleche, legierte 162.
 Eisenverluste 161.
 — Untersuchung und Trennung 164.
 Elektrisches Feld 19.
 Elektromotorische Kraft 3.
 — — der Selbstinduktion 15.
 — — gegenseitigen Induktion 131.
 Emde 2, 133, 152, 205.
 Energie des elektrischen Feldes 19.
 — — magnetischen Feldes 12.
 — — — zweier Stromkreise 129.
 Energieabsorption bei Wanderwellen 335.
 Energieübertragung durch das Drehfeld 172.
 — beim Transformator 136, 167.
 Epstein 155, 164.
 Erdschlußdrosselspule 291.
 Erregerstrom des magnet. Kreises 153.
 — bei Wechselstrom 156.
 — Berechnung des effektiven 160.
 Ersatzstromkreis, allgemeiner 225.
 — des Induktionsmotors 176.
 — einer Leitung 212.
 — einer Spule 218, 344.
 — des Transformators 167.
 Experimentelle Bestimmung der Konstanten eines Stromkreises 227.
 Farad 20.
 Faraday 2.
 Feldverteilung einer Maschine 168.
 Ferranti 193.
 Field 152.
 Fischer Hinnen 86.
 Fleming 9, 56, 90.
 Formfaktor 9.
 — bei mehrwelligen Strömen 89.
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen 187, 296.
 Fortpflanzungskonstante 185, 198, 216, 218.
 Fouriersche Reihen 74.
 Franke 204.
 Freie Schwingungen 253.
 — — auf Leitungen 292.
 — — bei Spulen 344.
 Frequenz 1.
 Friese 126.
 Funkenstrecke 303, 308.
 Gegenseitige Induktion 130.
 — — bei Leitungen 132.
 — — bei mehrphasigen Stromkreisen 143.
 — — bei Stromverzweigungen 139.
 — — Messung der 140, 143.
 Geometrische Orte 35, 247.
 Görges 64.
 Gothe 220.
 Grade, elektrische 170.
 Graphische Analyse von mehrwelligen Strömen 86.
 — Darstellung von Wechselströmen 26.
 — — von mehrwelligen Strömen 95.
 Grundwelle eines mehrwelligen Stromes 72.
 Gumlich 158.
 Hängeisolatoren, Spannungsverteilung bei 216.
 Hautwirkung 147.
 Hay 262.
 Heaviside 17, 198, 279, 344.
 Helmholtz 254.
 Henry 12.
 Heyland 244.
 Hörnerfunkenstrecke 303, 308.
 Hopkinson 135.
 Hummel 63.
 Hysteresisarbeit 156.
 Hysteresisschleife 155.
 Hysteresisverluste 161.
 Impedanz 17.
 Induktionsgesetz 2.
 Induktionsfaktor 97.
 Induktionsmotor 176, 239.
 Induktivität 11.
 — gegenseitige 130.
 — verteilte, bei Leitungen 183, 206, 209.
 Induzierte elektromotorische Kraft 3.
 Inversion 38.
 Joule 2.
 Kabel 192, 196, 197, 210.
 — Einschalten eines 341.
 Kabelfaktor 204.
 Kapazität 19.
 — verteilte einer Leitung 183, 205.
 — Einfluß auf d. Stromkurve 91.
 Kapazitätskoeffizienten 205.
 Kennelly 115.
 Kettenleiter 214.
 Koerzitivkraft 155.
 Komplexe Zahlen, Rechnung mit 32.

- Kondensator 20.
 — Ladung und Entladung 21, 264, 272, 274.
 — Ausschalten des 291.
 — Einfluß auf Wanderwellen 336, 337.
 Kondensatorleitung 222.
 Kondensatortransformator 65.
 Konstanten von Leitungen 182, 201.
 — von Mehrfachleitungssystemen 205.
 — Tabelle 211.
 — des Leerlauf- und Kurzschlußversuches 224.
 Kopplungsfaktor 134.
 Krarup 197.
 Kreisdiagramm 35, 47, 137, 235, 239, 245.
 Kreisfrequenz 1.
 Kuhlmann 283.
 Kurzschluß einer Leitung, Schwingungen bei Unterbrechung 304, 313.
 Kurzschlußversuch 201, 225.
- La Cour** 39, 224.
 Ladung eines Kondensators 21, 264, 270.
 Leerlaufversuch 225.
 — bei einer Leitung 201.
 Legierte Eisenbleche 162.
 Leistung eines einwelligen Stromes 9.
 — — mehrwelligen Stromes 88.
 — — Mehrphasensystems 104.
 — in der symbolischen Darstellung 33.
 — Messung mit drei Voltmetern 49.
 — — — — Ampèremetern 56.
 — — mit der Brücke 61.
 — — bei Mehrphasenströmen 125.
 — maximale eines Stromkreises 230.
 Leistungsfaktor 189.
 Leistungsmesser, Korrektionsformeln 56.
 Leitung, Konstanten elektr. Leitungen 182, 201, 205.
 — Mehrphasenleitungen, gegenseitige Induktion 145.
 — Diagramme für Leitungen 190, 195, 199.
 — verzerrungsfreie 198, 294.
 Lichtbogenspannung beim Ausschalten 288.
 Linienspannung 102.
 Linke 262, 325.
 Lufttransformator 135.
- Magnetisches Feld, Energie des** 12.
 — — zweier Stromkreise 129.
 — — einer Maschine 168.
Magnetischer Spannungsmesser 155.
Magnetische Umlaufspannung 11.
Magnetisierung des Eisens mit Gleichstrom 153.
- Magnetisierung des Eisens, zyklische** 155.
 — — — — Wechselstrom 156.
 — — — — Mehrphasenströmen 159.
Magnetisierungsstrom, einphasig 156, 160.
 — mehrphasig 159.
 — äquivalenter 166.
Martienssen 181.
Maßsystem, praktisches 5, 12, 19.
Maximale Leistung eines Stromkreises 230.
Maxwell 2, 12, 19, 156, 205, 208, 292.
Mehrfachleitungen, Konstanten von 205.
Mehrphasenströme 99.
Mehrphasensysteme 96.
 — balancierte 104.
 — symmetrische 100.
 — unsymmetrische, Zerlegung in symmetrische 122.
 — verkettete 101.
Mehrphasen-Induktionsmotor 176, 239.
Mehrwellige Ströme 72.
 — — graphische Darstellung 95.
 — — in Mehrphasensystemen 122.
Mikrofarad 20.
Millihenry 12.
Mittelwert eines einwelligen Stromes 7.
Moivrescher Satz 31.
Möllinger 164.
Multiplikation von Vektoren 30.
- Nichtstationäre Stromkreise** 292.
Nulleiter 102.
- Oberwellen eines mehrwelligen Stromes** 72.
Ölschalter 290.
Ölschläger 46.
Ohmsches Gesetz 15.
Orlich 126, 211.
Ortskurven 35, 248.
Ossanna 244.
Oszillierende Ladung und Entladung eines Kondensators 272, 274.
- Parallelschaltung von Stromkreisen** 50.
Periode 1.
Periodenzahl 1.
Periodenumformer 174.
Permeabilität 12.
Petersen 291, 309, 316, 329.
Pfiffner 333.
Phasenspannung 102.
Phasenverschiebung 5.
Phasenwinkel 2.
Phasenzahlumformer 174.
Plattenkondensator 20.
Polardiagramm einer Leitung 190.
Poyntingscher Satz 293.
Pupinkabel 197.

Quasistationäre Stromkreise 252.

Reaktanz 17.

Reaktanzspannung 17.

Reflexion der Wellen 297, 306, 320, 326.

Reflexionsfaktor 307, 321.

Reflexionsfreie Leitung 196.

Reihenschaltung von Stromkreisen 40.

Remanenz 155.

Resonanz 23, 53.

— bei mehrwelligen Strömen 93.

— — eisenhaltigen Drosselspulen 177.

— — Leitungen 194, 316, 329.

Resonanztransformator 244.

Ringschaltung 103.

Richter 164.

Rogowski 133, 152, 155, 200, 263.

Rose 158.

Rothe 87.

Rüdenberg 216, 325, 332, 337.

Runge 83.

Schalter mit Widerstandsstufe 262,
291, 332.

Schaltwelle 324.

Scheinleistung 18.

Scheinleitwert 17.

Scheinwiderstand 17.

Scheitelfaktor 9.

— bei mehrwelligen Strömen 89.

Schleiermacher 84.

Schlüpfung 175.

Schwingungen, freie 252.

— auf Leitungen 292.

Schwingungskreis 24.

— Verhalten bei mehrwelligen Strömen 93.

Schwund, magnetischer 2.

Spannungsabfall einer Leitung 41, 43.

Spannungsänderung 44, 229.

— bei Mehrphasenströmen 117.

Spannungsdiagramm 35.

Spannungsmesser, magnetischer 155.

Spannungsregelung durch Blindstrom 67.

Spannungssprung einer Welle 323.

Spannungsverteilung bei Hängeisolatoren 216.

— bei Spulen 218.

Spiralendiagramm für Leitungen 195, 199.

Spulen für hohe Frequenz 218, 344.

Spulenleitung 220.

Steinmetz 17, 161, 176.

Sternpunkt 101.

Sternschaltung 101, 105.

— Berechnung der Stromverteilung 106.

Streuung 133.

— Messung der, beim Transformator 138.

Streuintduktivität 134.

Streukoeffizient 133.

Stromdiagramm 35.

Stromkreise, zusammengesetzte 58.

— quasistationäre 252.

— nichtstationäre 292.

Stromresonanz 53.

Sumpner 49.

Superposition, Berechnung der Stromverteilung durch 69.

— der Leistungen 71.

— allgemeine Gleichungen 226.

Suszeptanz 18.

Swinburne 49.

Symbolische Darstellung von Wechselströmen 29.

— — — Ausgleichströmen 277.

Teilkapazitäten 208.

Thomson, W. 196, 340.

— J. J. 162.

Thomsonscher Schwingungskreis 24.

Transformator, Luft- 135.

— mit Eisen 165.

— Resonanz- 244.

— allgemeiner 176.

— Einschalten des 260.

— Ausgleichsvorgänge beim 284.

Überspannungen 180.

Umlaufspannung, elektrische 2.

— magnetische 11.

Unbalancierte Mehrphasensysteme 104.

Vektoren, Darstellung von einwelligen Strömen durch 26.

— Addition und Subtraktion von 29.

— Differentialquotient und Zeitintegral 31.

— Drehung von 29.

Vektordiagramm eines Transformators 137, 165.

— einer Leitung 190, 195, 199.

Verkettete Mehrphasensysteme 101.

Verlustziffer 163.

Verschiebungsfluß 19.

Verzerrungsfreie Leitung 198.

Verzerrte Wellen 340.

Wagner, K. W. 220, 223, 279, 344.

Waltz 63.

Wechselinduktivität 180.

Wechselstromwiderstand 148.

Wellen, ebene elektromagnetische 293.

— fortschreitende 187, 295.

— stehende 193.

— Fortpflanzungsgeschwindigkeit der 187, 296.

Wellenlänge 186.

Wellenstirn 323.

Wellenwiderstand 187, 296.
Wheatstonesche Brücke 59.
Widerstandserhöhung 148.
Widerstandsschalter 262, 291, 332.
Winkelmaß 187.
Wirbelströme 158.
— Stromwärme der 161.
Wirkungsgrad 232.
Wirkleistung 18.
Wirkleitwert 18.
Wirkspannung 17.
Wirkstrom 17.
Wirkwiderstand 17.

Zeitintegral eines Vektors 31.
Zeitkonstante 254.
Zeitlinie 26.
Zerlegung eines mehrwelligen Stromes
74.
— eines unsymmetrischen Mehrphasen-
systems 120.
Zusammengesetzte Stromkreise 58.
Zweiphasensystem 101.
Zweiphasen-Dreileitersystem 118.
Zyklische Magnetisierung 155.
Zylinderkondensator 21.